

二维磁阱的分析、可视化与设计

杨博涵 PB20000328

20 级少年班学院 7 班

2021.6

摘要：本文基于磁作用束缚势能的概念，对磁阱的基本原理进行了介绍。随后将通过对经典的同向等电流电流环之间的磁阱的分析，进行可视化，积累分析经验，并作为引子，引入到最终的二维磁阱设计中。设计部分则会着重介绍基本设计原理与两个实战实例，以完成对磁约束的简单探讨。

关键词：二维磁阱，Matlab，磁作用束缚势能，可视化，磁阱设计

目录

一. 选题背景与目标

二. 磁作用束缚势能简介

三. 同向等大等电流的电流环之间磁阱的可视化与分析

1.对场的分析

2.对粒子运动的分析

四. 设计简单磁阱

1.设计原理

2.可行性讨论

3.准备：编程思路

4.大喇叭形磁阱构建

5.赛车轨道形磁阱构建

五. 总结与感想

六. 参考文献

一．选题背景与目标

磁约束在当今物理学发展中有着重要作用，尤其在能源方面对可控核聚变约束探索提供了一个理想选择。可以说，解决了可控核聚变难题，世界将会发生翻天覆地的变化。因此，研究磁约束很有必要。

由于所学知识有限，本文并不能完整讨论磁约束体系。但是，基于所学知识，仍可以给出二维磁阱的特殊结果。本文将聚焦于二维磁阱的可视化与设计工作，通过磁作用束缚势能的概念，完成对磁约束的简单探讨，并为今后进一步探究打下基础。

二．磁作用束缚势能简介

为了更好的描述粒子在磁阱中的运动，定义磁作用束缚势能（磁偶极子在外场中的能量）为从零势能状态开始外力克服安培力所做的功。

可得

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad [1]$$

此式不同于磁能的定义，这里认为的是磁矩固定不变，由粒子在外磁场中的位置与取向决定势能。且中性原子的半径尺度远小于 B 的变化尺度，故上式成立。

中性原子的磁矩分为轨道磁矩 μ_l 与自旋磁矩 μ_s 。在经典理论下，认为电子电流不随 B 的改变而改变，即原子总磁矩 μ 大小在过程中不变，此时磁作用束缚势能变成了位置的函数。在接下来的所有讨论中，我们假设 B 与 μ 的方向始终垂直纸面（即中性原子始终做二维运动），且以 μ 的方向为正方向。此时有

$$U = \mu B$$

即磁作用束缚势能只与磁感应强度大小有关。

磁作用束缚势能有鲜明的“几何意义”，我们完全可以把它等效看成“重力势能”，因此我们同样可以作出“高度图”，只需要保证

$$U \propto h$$

这样一种形象直观的物理思想将会下面的分析中具有巨大作用。

需要说明的是，上述经典解释结论在量子力学对中性原子磁矩的解释中也成立。可以证明，一个具有磁偶极矩为 μ 的中性原子在非均匀的静磁场 B 中运动时，由于塞曼效应，将感受到囚禁势，仍有关系 $U \propto B$ [2]，这里就不多赘述了。

由上式可以看出，当 μ 与 B 反向时，原子会趋向于弱场，即所谓处于弱场搜寻态；当 μ 与 B 同向时，原子会趋向于强场，即所谓处于强场搜寻态。但是无论原子处于弱场搜寻态还是强场搜寻态，本质均为追求能量最小。如果原子所具有的动能不足以逃离势阱，则将被囚禁在三维磁阱中。下文所讨论的情况均选取为弱场搜寻态。

三．同向等大等电流的电流环之间磁阱的可视化与分析

下面，我将对同向等大等电流的电流环之间磁阱进行分析。这里做出一个解释，在经典理论下，可以把中性原子看作电流环，因此只要磁矩始终和磁场共线，上文所属的二维运动假设就是可行的，因为其受力始终在平面内。

1. 对场的分析

由两个位于 $x=\pm a$ 同向电流环构成的磁阱，在 $x=0$ 附近 B 近似沿 x 轴方向。

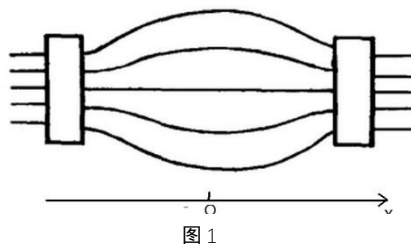


图 1

设电流环半径为 R ($R \ll a$)，电流为 I ，方向如图向下， y 轴正方向竖直向上，磁矩沿 x 轴负向。

由毕奥萨伐尔定律， $x=0$ 附近的距离中心 O 为 r 的地方的磁场为

$$\begin{aligned}\vec{B}(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}_1(\vec{m} \cdot \vec{n}_1) - \vec{m}}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}_2(\vec{m} \cdot \vec{n}_2) - \vec{m}}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 m (2a^2 - r^2)}{2\pi (a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_x\end{aligned}$$

当 $r=0$ 时，就变回到我们熟知的轴线上的磁场。

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 m}{\pi a^3}$$

令 $r^* = r/a$ ，利用数学软件作出函数 $f(x, y) = \frac{2-(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2))^{\frac{5}{2}}}$ 的图像，得下图 2

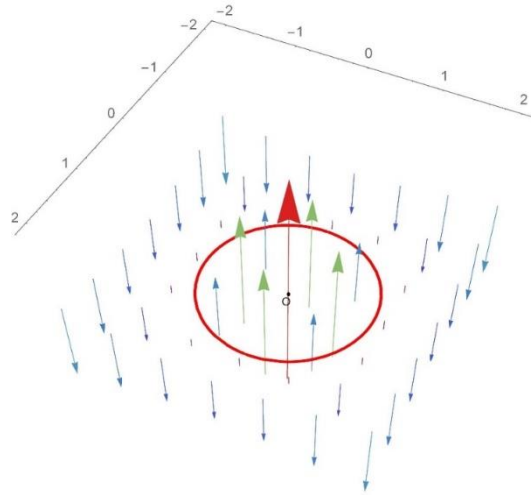


图 2

其中，红线是 $r^* = \sqrt{2}$ 曲线，我们发现当 $r^* < \sqrt{2}$ 时， B 沿 x 轴正方向；当 $r^* > \sqrt{2}$ 时， B 沿 x 轴负方向。磁场

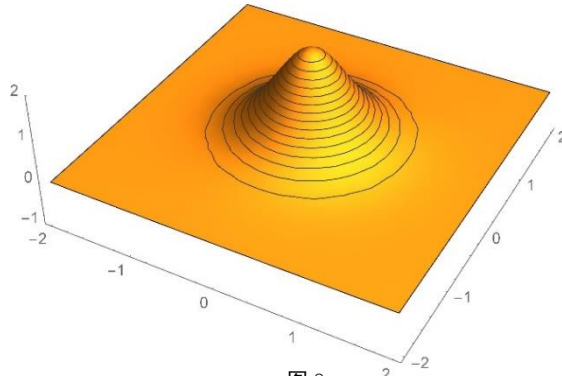


图 3

形成了一个随 r 单调的变化趋势，非常有利于磁阱的构建。

考虑磁作用束缚势能，我们可以得到更加直观的图 3 与图 4，其纵轴均为 U 。

图 3 是作图范围 $[-2,2]$ 的远视图，我们可以发现在 $r^* < \sqrt{2}$ 的范围内， U 明显的大于 0，成一个小山包形，而当 $r^* > \sqrt{2}$ 时，则几乎为趋于 0 的“平地”。

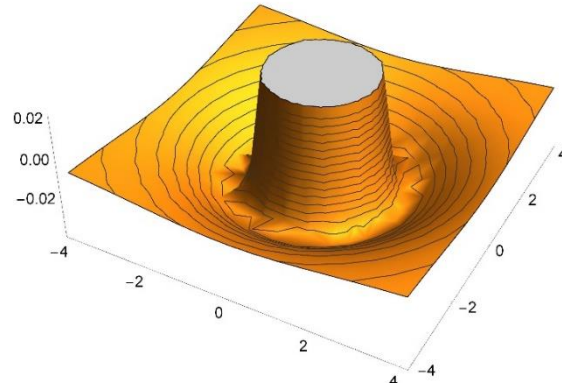


图 4

为了更好刻画磁阱局部磁作用束缚势能的变化，图 4 作图范围改为 $[-0.02,0.02]$ ，此时我们发现， U 其实是有个最小槽谷的。令 $\frac{dB}{dr} = 0$ ，我们有

$$-\frac{5r(2-r^2)}{(1+r^2)^{7/2}} - \frac{2r}{(1+r^2)^{5/2}} = 0$$

解得

$$\{r^* \rightarrow 0\}, \{r^* \rightarrow 2\}$$

其中， $r^* = 0$ 对应其最大值点， $r^* = 2$ 对应其最小值点。

将 $r^* = 2$ 代入原式，可得到势能最小值

$$U_{min} = -\frac{\sqrt{5}\mu_0\mu m}{125\pi a^3}$$

我们来研究无穷远边界，当 $r^* \rightarrow \infty$ 时，可得到

$$U \rightarrow 0$$

至此，我们便弄清了整个同向等大等电流的电流环之间磁作用束缚势能的分布，其二维截面分布如图 5。

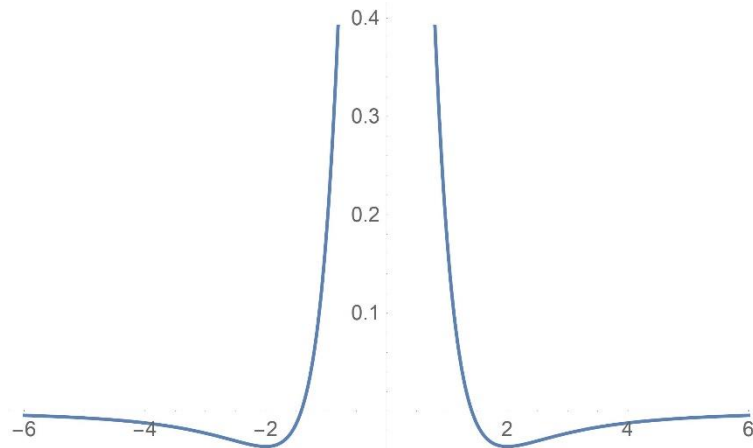


图 5

2.对粒子运动的分析

下面我们研究原子的运动。我们发现，当中性原子处于 $r=2$ 附近时，周围形成势阱，受到梯度力 F 的作用。利用柱坐标下 Nabla 算子，可得

$$F = -\nabla U = -\nabla \frac{\mu\mu_0 m(2a^2 - r^2)}{2\pi(a^2 + r^2)^{5/2}} = -\frac{3\mu\mu_0 m r(r - 2a)(r + 2a)}{2\pi(a^2 + r^2)^{7/2}} \underline{e_r}$$

幂级数展开至线性项，得

$$F \approx -\frac{12}{125\sqrt{5}a^5}(r-2a)\vec{e}_r$$

但是，我们不能说径向上受到线性回复力就说它在径向上做简谐运动，因为自身可能带来的惯性力我们还未考虑，显然，在不加外力来平衡离心力的情况下，粒子不可能边做圆周运动边径向简谐振动。因此，粒子必将以一个尝试挣脱磁阱却不得的姿态在磁阱中运动。

从 F 的表达式可以看出，粒子在磁阱中受到有心力作用，故满足角动量守恒。此外，磁阱高度限制了被约束粒子的能量，即粒子总能量必须低于 0 才能被约束。根据能量守恒，粒子在有心力场中能被限制住的临界状态为

$$-\frac{\sqrt{5}\mu_0\mu m}{125\pi a^3} + \frac{1}{2}m_{Fe}v_c^2 = 0$$

即

$$v_c = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}\mu_0\mu m}{125\pi a^3 m_{Fe}}}$$

所以，这个磁阱（虽然没有实际意义，但它在定义上仍是磁阱）要想限制住粒子，粒子速度的全局最大值就为 v_c 。

但是必须指出的是，其并不是一个优秀磁阱，因为梯度力过小，需要极大的纵深才能限制原子。

到此为止，整个同向等大等电流的电流环之间磁阱的分析工作已经完成。

四．设计简单磁阱

经过对经典磁阱的探讨，下面我们来自己设计一个磁阱。这里先假设磁场方向始终垂直纸面 xoy，并且传导电流除了对粒子有磁场作用外没有其他任何相互作用。

1. 设计原理

显然，磁场不是任意构建的，必须满足一定的基本方程。

1) 由无源性有

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

利用直角坐标下的 Nabla 算子，与假设 $B_x = B_y = 0$ ，可得

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

即必须要求在运动平面附近 B 与 z 无关。

2) 由安培环路定理

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_0$$

有

$$\vec{J}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{j} \right)$$

3) 电流 \vec{J}_0 也必须满足稳恒性，即

$$\oint_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{s} = 0$$

上述的三条构建规则已经完备，因为在不考虑导线电阻的情况下，构造电流在满足 3 式的情况下完全可以自我持续进行下去，而电流分布一旦确定，由静电场唯一性定理，便可以唯一定出空间所有场。

为了简化构造，我们强化条件，令全空间 B, J_0 均与 z 无关。这样处理有两点好处，一是自动满足 1 式，二是转化为二维问题，可以将 3 式简化为在 z=0 平面内有

$$\oint_L \vec{J}_0 \cdot \vec{n} dl = 0$$

L 为平面内任意封闭曲线， \vec{n} 为弧元的单位外法向量。其微分式为

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$$

将 2 式代入有

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

因B无穷次可导，由数学知识得

$$\frac{\partial B_z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial B_z}{\partial y \partial x}$$

即 3 式恒成立。

综上，我们唯一关心的就是 2 式

$$\vec{J}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{j} \right)$$

因此，在唯一性定理的保证下，我们任意构造一个满足上述假设的磁场，就一定能找到对应的电流分布，这就是磁阱设计的基本原理。

2. 可行性讨论

在上面，我们假设了全空间分布有 B 与 J_0 ，形成了稳恒电流场与静磁场，并且，我们假设传导电流除了对粒子有磁场作用外没有其他任何相互作用。但是，这样一种假设是否合理？或者说，是否主观意味过浓？能否实践？为此，笔者将疑问总结为两点：（1）电流密度 J_0 可以在全空间随意分布吗，如何产生呢？（电流产生问题）（2）全空间都有电流，那么粒子飞进电流场后没有其他碰撞吗？（传导电流作用力问题）

显然，如果我们采用金属导线来传导电流，外来原子是绝对不可能在晶格中无阻力运动的，甚至是否能通过都是问题。如果采用孤立有序电子束流来产生磁场，原子与电子之间的不断碰撞必然会打乱原有磁场。因此，我们必须寻找一种特殊的传导方法来产生磁场，最好能脱离实物粒子。

基于这样的想法，我们从揭示场与场关系的 Maxwell 方程组出发，思考可能的方案。

Maxwell 方程组的微分形式为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

我们的目光落在第四个式子上，笔者想到：可否使用变化的电场（位移电流）来产生稳恒磁场呢？当然可以！

而且这种方法完美解决了以上两个问题，既可以产生全空间磁场，也可以避免碰撞。由 \vec{J}_0 与 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的在产生磁场上的等价性，我们下文统一用 \vec{J}_0 表示。

但是，处理场的问题，我们必须小心又小心，因为很有可能产生连锁反应。新的问题又来了： \vec{D} 又能够随意分布吗？其需要满足什么条件？我们发现，如果假设全空间分布的磁场大小稳恒，且无其他电荷分布，那么必有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

这要求 \vec{D} 始终为匀强场，这是我们不可接受的，否则 $\nabla \times \vec{H}$ 也会处处相同。因此，我们必须得使 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 不为 0，且为了满足磁阱的稳定条件，要求其处处相等或近似相等，形成一个“相对磁阱”。

这样能够构建出符合要求的 \vec{D} 分布吗？这个问题已经不是定性分析能处理的了，必须具体情况具体分析，这

里就不深入追究了。但我们能确定的是，如果 \vec{D} 分布被找到，那么相应的磁阱就一定能建立。而且可以预测，在大多数情况下是存在相应的 \vec{D} 分布的！

除了位移电流法，笔者还有其他设想，比如 Maxwell 分布的宏观运动电子束流法（能够保持磁场稳定），这里就不赘述了。

3. 准备：编程思路

下面，我们来使用 Matlab 来尝试模拟粒子运动。在这之前，我们先进行必要的准备工作。（ps：以下均为国际单位制）

可视化编程思路为：（微元模拟法，或称有限元法）

- 1.取定一段时间，将该段时间细分为较小的等时片段
- 2.每一小段时间内看作匀变速运动处理
- 3.使用循环 for 函数连续模拟出不同时间段粒子的位置
- 4.形成图像

具体代码将作为附件给出。另外，由于 word 软件的限制，不能对图片进行交互式处理，故将 Matlab Figure 放在附件里，以便转换角度查看轨迹。

接下来，我们正式构建磁阱！

4. 大喇叭形磁阱构建

在水上乐园中经常能看见这样一幕，如图



图 6

这时我们设想，能否让 Fe 原子也能“冲浪”呢？我们开始尝试。

为了最终效果的美观，必须要求势垒（梯度）足够大，中性粒子速度足够小，否则在拐弯处可能弧线半径过大。

取 ($k>0$)

$$B = k\sqrt{x^2 + y^2} + C$$

C 为待定常数。这里我们对 $x=0, y=0$ 附近进行局部光滑处理，并且接下来均不考虑原子进入该区域的问题。代入二式得

$$\vec{J}_0 = \frac{k}{\mu_0} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right)$$

显然， \vec{J}_0 大小处处相同为 $\frac{k}{\mu_0}$ ，方向始终相对原点呈顺时针方向。

把磁作用束缚势能 U 作图画出，可以得到符合预期的“大喇叭形”。

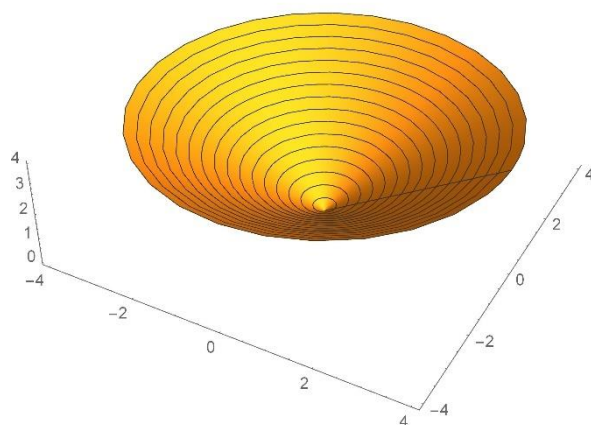


图 7

下面就是检验“冲浪”效果的时刻。我们将选取一定的参数，进行模拟。（以下计算均为国际单位制）

取 Fe 中性原子, 其原子磁矩为 $5.9\mu_B$, 其中 μ_B 为玻尔磁矩, 大小为 $9.2732 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 铁原子质量 $9.296 \times 10^{-26} \text{ kg}$, 取 $k = 5 \times 10^{-3} \text{ T/m}$, 粒子的初始位置为 (6, 0), 初始速度 (0, 2)。

粒子所受梯度力为

$$F = -\nabla U = -\mu k \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} i + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} j \right)$$

这并不是一个平方反比力场，故我们可以推断粒子不是以闭合轨道运动。

如此，我们便可以使用 Matlab 模拟了。

二维实际运动图如图 8 所示。其中蓝色圆圈指代起始点，绿色圆圈指代终止点。

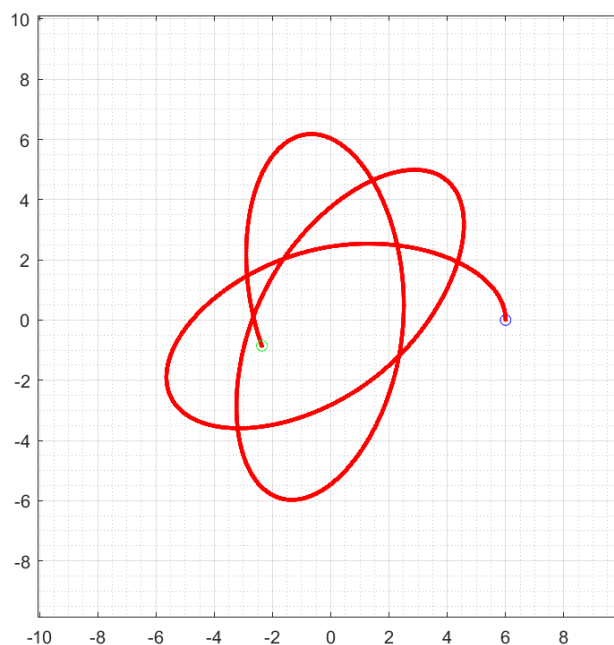


图 8

可以看到，在 F 的有心力作用下，Fe 原子并不以一个固定的闭合轨道运动，而是以近乎水星进动姿态，在‘大喇叭’中运动，这是因为只有平方反比力场和线性力场这两类有心力场可以使其其中的一切有界运动轨迹闭合。

三维正视图俯视图如图 9 所示，外围是势能曲面。

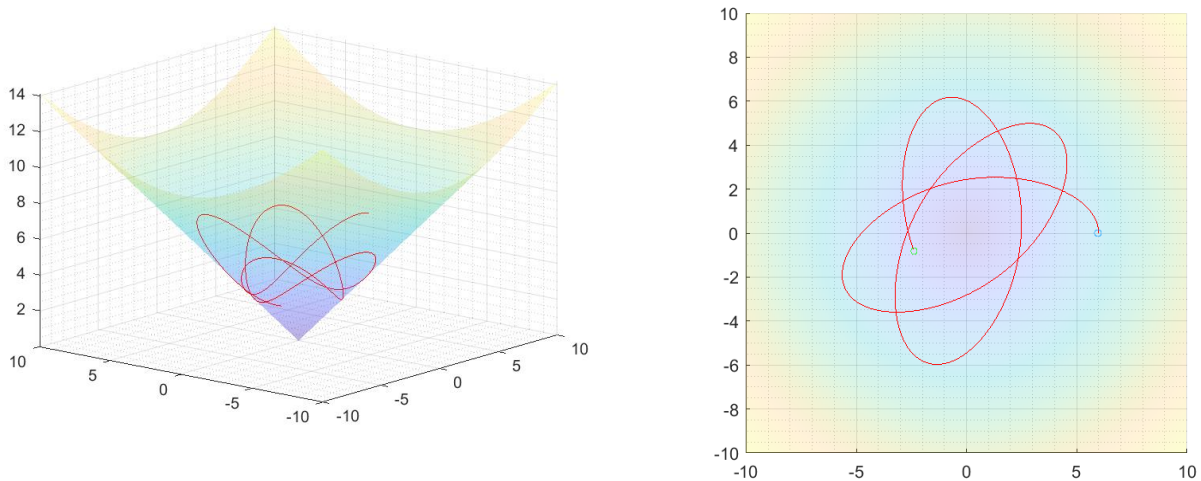


图 9

下面我们加大限制力度，将 k 提升至 $10^{-1}T/m$ ，二维图如图 10 所示

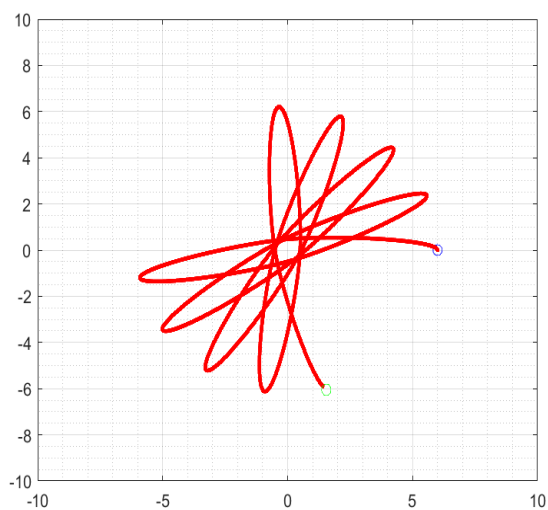


图 10

可以看到，当限制力度增大后，粒子运动区域明显向原点收缩，“椭圆”变窄，形成一幅“花图”。可以外推知，当 k 越来越大时，“椭圆”会变得越窄，约束效果也就越好，当然这是以强电流为代价的。

三维正视图俯视图如图 11 所示

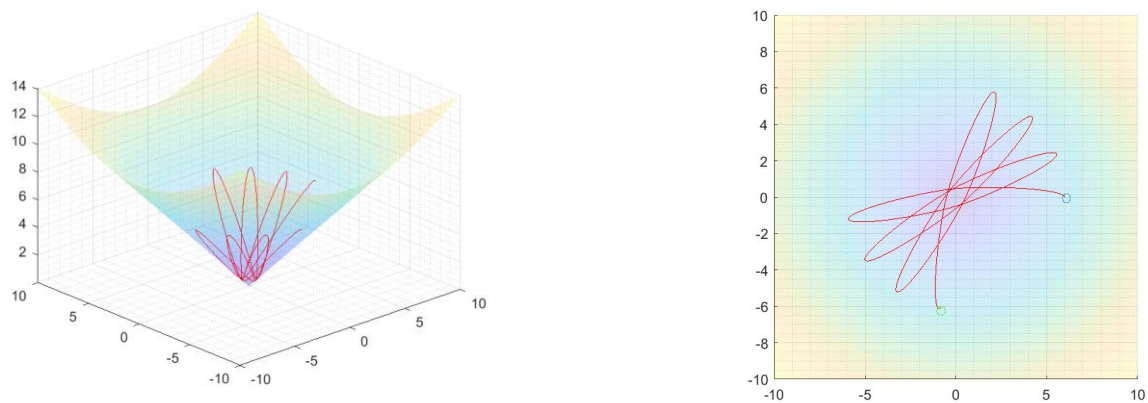


图 11

从上面几幅图我们可看出，Fe 原子的类周期运动正是无阻力冲浪的结果，假设我们在其身上施加一个阻尼

力，可以预见它的轨道半径会越来越小，直至从原点漏出，而这正是真正“大喇叭”的原理。

综上，大喇叭形磁阱不仅在有效性上突出，而且束缚图样美观，在题设下完全可以胜任限制 Fe 原子的工作！

5. 赛车轨道形磁阱构建

接下来，我们给 Fe 原子设计一个赛车轨道。

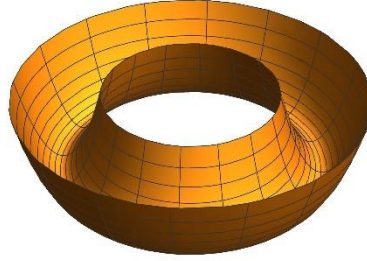


图 12

如图 12 所示，这是抛物线 $z = 2(x - 3)^2$ 的绕 z 轴的旋转曲面，按照设计方案，Fe 原子将会在其中“翻滚”前进。可以发现，这种形态的磁阱与同向等大等电流的电流环之间磁阱非常像，因此我们不难预测，Fe 原子在其中的运动状态应相似。

我们先来确定磁场 B ，令 $(a > 0)$

$$B = k(r - a)^2$$

其中半径 $r \in [a - \Delta, a + \Delta]$ 。

代入 2 式，有

$$\vec{j}_0 = \frac{2k}{\mu_0} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} - \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right)$$

同样的，我们不考虑超出运动范围的磁场，这些空间的磁场均做光滑处理，以保证总磁场可以形成。粒子所受梯度力为

$$F = -\nabla U = -2\mu k \left(\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right)$$

下面我们将进行模拟。仍取 Fe 中性原子作为对象，并取 $k = 5 \times 10^{-3} T/m$ ， $a = 10$ ，粒子的初始位置为 $(10, 0)$ ，初始速度 $(0, 4)$ 。

二维图如图 13 所示

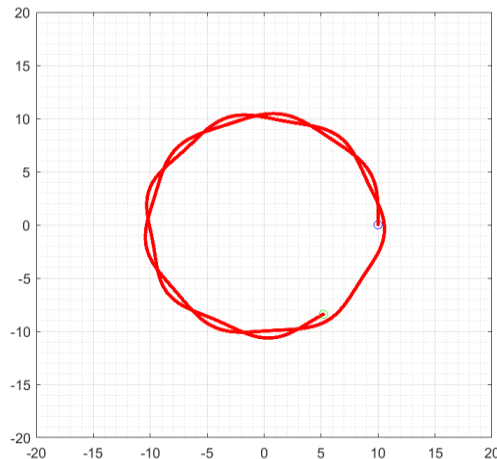


图 13

三维轨迹图如图 14 所示。

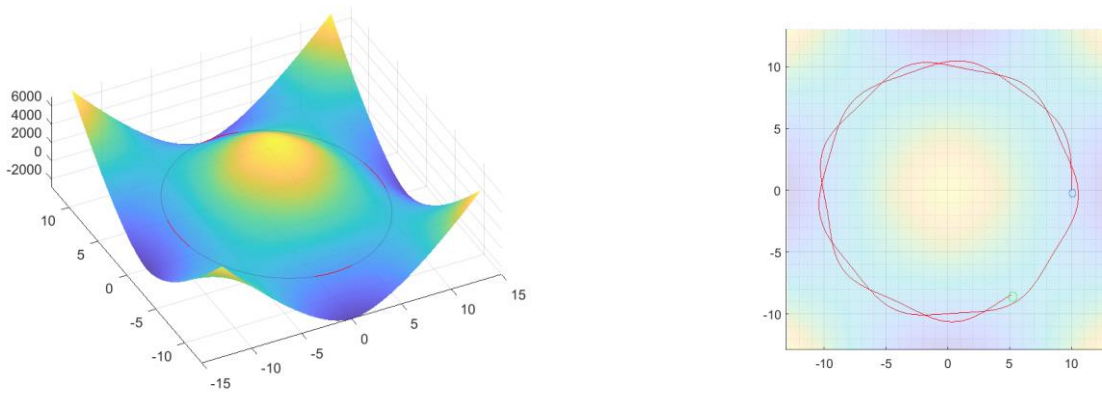


图 14

结果与预期一致，果然粒子在其中做径向有振荡的圆周运动，契合了设计要求，也符合我们的直观印象。如果我们把粒子初速度调大至 $(0, 10)$ ，则粒子运动更加“飘逸”，如下图（蓝线是最低势能线）

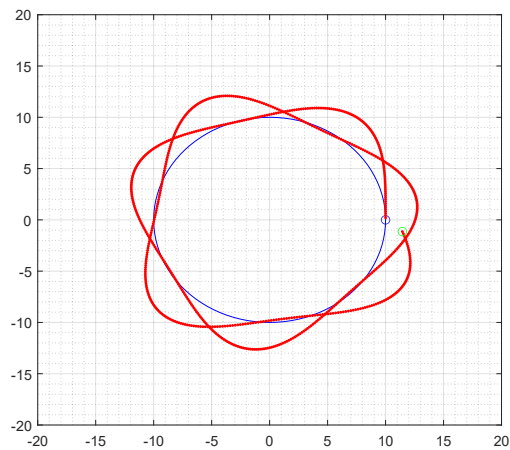


图 15

如果我们继续把粒子初速度调大至 $(0, 20)$ ，则如下图 16

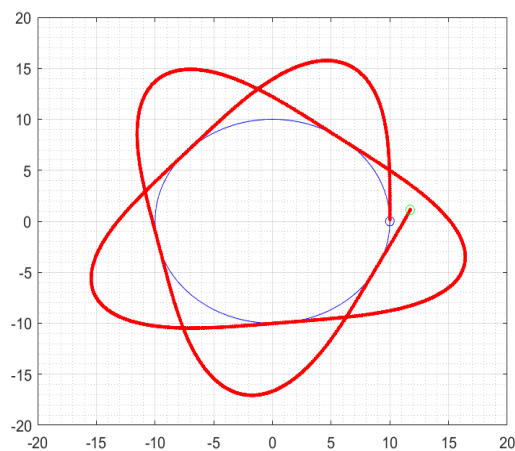


图 16

这里笔者添加了一段录屏，记录了 Fe 原子实际轨迹动态图（使用了 pause 函数），作为附件给出。

但即使我们继续调大初速，也只是使图像形状有所改变，而粒子是不可能离开磁阱的，因为在题设下磁阱高

度充分大。在实际实验中，也可以相应调整磁阱高度，以满足需要。综上，赛车轨道形磁阱也可以胜任束缚 Fe 原子的工作！

五．总结与感想

本文通过对经典磁阱的详实分析，介绍了可视化磁阱的编程方法思想，从对场的研究和模拟实验中分析同向等大等电流的电流环之间磁阱。之后，又给出一般性的磁阱设计方法，并设计了两个简单磁阱。

当然，本文所给出的磁阱设计方法只是理论上可行，实际上并不能造出全空间磁场，并且情况更加复杂。即使可以做到或局部近似，成本与有效性上可能还是不及 Ioffe 磁阱等现代实验磁阱。但是，不可否认的是设计与分析方法仍具有一定的现实参考意义。

笔者第一次书写小论文，必然在行文上与逻辑度上有一定的问题存在，请读者批评指正。

笔者在可视化磁阱工作中遇到诸多问题。受限于机能与编程知识的匮乏，以及 word 软件的限制，原计划中的分区磁场设计与交互展示没有能够完成，笔者对此表示十分遗憾。如果以后有机会，可以将这一块内容补上，整个可视化工作就将更加完美。

最后，感谢叶邦角老师的精心制作的 ppt 给笔者提供的灵感，感谢胡友秋与程福臻老师详实的课本在知识上提供的帮助。

六．参考文献

[1]:胡友秋,程福臻.电磁学与电动力学下册（第二版）[M].科学出版社.2014.6

[2]:胡建军.中性原子的双阱磁囚禁及其应用[D].苏州大学.2003.3