第一章 数学基础

1. 标量：在坐标变换中不变的量
   标量 $T(x,y,z,t)$
   向量：形如 $A_i e^i$ 的量 ← 坐标系选择而改变！(随 e^i 变)
   张量：形如 $A_{ij} e^i e^j$ 的量
   PS. 所以说与位移向量变换一致（平移除外，因为位移是点间差的）而三函数的有意义无关

* 满足分量变换关系的量可以组成三元组
* 由三者之一可以为此组合成新的
ex. $(\frac{E}{c},\vec{p})$ $(\omega,\vec{k})$ $(\rho,\vec{j})$
当在空间不是什么之变的，系一个相应于 e_i 的符合物理量的变换

2. Einstein 求和约定
   哑/自由
   ex. $\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=3$
   ex. C_i+D_j ✗✗✗
   * 点乘 $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i$
   叉乘 $\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}A_iB_je_k$ } 所有运算都能用下标运算解决！
   * $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}}$

3. ∇算符
$$\boxed{\nabla T=e_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\quad \nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\quad \nabla\times\vec{A}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}e_k}$$

4. 常见向量运算证明
   必须同时注意 ∇ 的向量性与微分性！
   ex. 计算 $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})$
   ① 分别做分法 $\nabla\xrightarrow{\text{拆成}}\nabla_A$ 与 ∇_B
   $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\nabla_A\times(\vec{A}\times\vec{B})+\nabla_B\times(\vec{A}\times\vec{B})$
   $\nabla_A\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla_A)\vec{A}-(\nabla_A\cdot\vec{A})\vec{B}$
   $\nabla_B\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla_B\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B}$
   $\Rightarrow\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})$ 自主择标记来做！
   PS: $\nabla\times(\nabla\times\vec{B})$ 无需分别
   ② 分量法
   $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmj}\partial_i(A_lB_m)e_k$
   $=(\delta_{km}\delta_{il}-\delta_{kl}\delta_{im})(B_m\partial_iA_l+A_l\partial_iB_m)e_k$
   $=(B_i\partial_iA_k+A_k\partial_iB_i-B_k\partial_iA_i-A_i\partial_iB_k)e_k$
   $=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

* 混合积可以交换位置
* 采用一些常见的公式
* 双叉乘采用"中间-外边"法
   $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$（中 外）
   $(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}=(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$（外 中）

5. 张量
   引入：为了通过 $\vec{T}=\vec{g}\vec{v}$
   * 当且仅当对称张量时 $\vec{A}\vec{B}=\vec{B}\vec{A}$
   * $\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{B}=\vec{B}\vec{A}:\overleftrightarrow{T}=\overleftrightarrow{T}:\vec{B}\vec{A}$
   * prop. ① $\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{A}$
   ② $\overleftrightarrow{I}:\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{B}$
   ③ $\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\nabla\varphi$
   ④ $\overleftrightarrow{I}\cdot\nabla\vec{B}=\nabla\cdot\vec{B}$
   * 张量与矩阵相似 → 并矢与矩阵相乘
   * 张量变换：通过 $A_iB_je^ie^j$ 来推广 $F_{ij}e^ie^j$ 的变换
   $\begin{cases}\text{标量 } \varphi'=\varphi\\ \text{向量 } A'^{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha}\\ \text{张量 } F'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}F^{\alpha\beta}\end{cases}$

ex. 证明 $\nabla\cdot(f\vec{g}\times\vec{r})=[\nabla\cdot(f\vec{g})]\times\vec{r}+\vec{g}\times f$
① $\nabla=\nabla_f+\nabla_g+\nabla_r$ 注意：$\nabla\cdot(f\vec{g})\neq\nabla f\cdot\vec{g}$ 微分性！
$\nabla_f\cdot(f\vec{g}\times\vec{r})=(\nabla f)\vec{g}\times\vec{r}$
$\nabla_g\cdot(f\vec{g}\times\vec{r})=(f\nabla)\vec{g}\times\vec{r}$
$\nabla_r\cdot(f\vec{g}\times\vec{r})=\nabla_r\cdot f\vec{g}\times\vec{r}=(\nabla_r f\vec{g})\times\vec{r}$
$=\vec{g}\times(f\nabla_r\vec{r})$
$=\vec{g}\times f\overleftrightarrow{I}=\vec{g}\times\vec{r}$

6. 狄拉克 δ 函数
* $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$
* 挑选：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$
$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$
prop.（必须基于积分证明）
$\delta(kx)=\frac{1}{|k|}\delta(x)$
$\delta(g(x))=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$ x_i 为 $g(x)$ 的根
PS 证明用必须用 $\forall f(x)$，$\int f(x)\cdots dx=\int f(x)\cdots$

7. 常用公式
① ∇相关
球坐标：$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}e_\varphi$
$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$$\nabla\times\vec{A}=\begin{cases}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}, & r\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi), & \theta\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}, & \varphi\end{cases}$$
$\nabla^2f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2f}{\partial\varphi^2}$
柱坐标：
$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}e_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}e_z$
$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$
$$\nabla\times\vec{A}=\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, & r\\ \frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}, & \theta\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}, & z\end{cases}$$
$\nabla^2f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}$
② 向量公式
$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$ $\nabla\cdot(f\vec{A})=f\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla f$
$\nabla\times(f\vec{A})=f\nabla\times\vec{A}+\nabla f\times\vec{A}$ $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$
$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$
$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$
$\nabla\cdot\vec{r}=3$ $\nabla\times\vec{r}=0$ $\nabla\vec{r}=\overleftrightarrow{I}$ $\nabla r=e_r$
$\nabla\times[f(r)\vec{r}]=0$
$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$
$(\nabla\times\vec{A})\times\vec{A}=\nabla\cdot(\vec{A}\vec{A}-\frac{1}{2}A^2\overleftrightarrow{I})-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{A}$
$f\cdot g$（后面电动力学）：$\int_V(f\vec{J}\cdot\nabla g+g\vec{J}\cdot\nabla f)dV=0$

第二章 狭义相对论

1. 协变性和相对性原理
* 相对性原理：对空间的各向同性的描述。（力学相对性原理）
* 变换方式：$\begin{cases}\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t'\\ t=t'\end{cases}$
* 问题：Maxwell 方程组不协变，可通过检验方程形式判断参考系..

2. 相对论原理
* postulates：
① c 不变 ② 所有物理规律协变（形式不变）
* 相关定义
事件：$(t,\vec{x})$ — 四维空间坐标
今后看待事件必须在四维空间里看待，不可基于三维来判断
时空间隔：
$\Delta s=(c^2\Delta t^2-\Delta\vec{x}^2)^{\frac{1}{2}}$
① 光信号连接的事件 $\Delta s=0$
② 一个惯性系中 $\Delta s=0$，另一个 $\Delta s'=0$
③ 时空间隔不变性
$\Delta s'^2=g(\Delta s^2)=a_0+a_1\Delta s^2+O(\Delta s^2)$
代入变换：$a_0=0$
忽略：$O(\Delta s^2)=0$
a 不与 $t,\vec{x}$ 相关，只与 v 有关 $a(|\vec{v}|)$
⇒ 取三个系 k_1,k_2,k_3 $\frac{a(v_1)}{a(v_2)}=a(v_3)$
⇒ 只有 $a(|\vec{v}|)=1$
④ 一个惯性系中 $v<c$，对所有惯性系 $v<c$
⑤ 分类：类光、类时、类空
$=0$ >0 <0（因果性无关）
对类时：存在一个系，$\Delta x=0$，$\Delta t\neq0$
对类空：存在一个系，$\Delta x\neq0$，$\Delta t=0$
（无因果性关系）

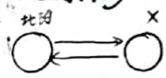
3. 满足相对论原理的变换 — Lorentz
* 线性
* 使 $\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2$ 不变
利用 $\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$ 旋转变换（可以在此处写）
令 $c\Delta t=\Delta s\cosh\theta$
$\Delta x=\Delta s\sinh\theta$
使变换为 θ 与 θ' 即保证
和 $\cosh(\theta+\varphi)$ $\sinh(\theta+\varphi)$ 的展开式
得 $x=ct'\sinh\Phi$ $\frac{v}{c}=\tanh\Phi$
$ct=ct'\cosh\Phi$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ y=y' & z=z'\end{cases}$$
$$\begin{cases}x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ y'=y & z'=z\end{cases}$$
四维形式：
$A^0=\frac{A'^0+v/c\,A'^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\gamma(A'^0+\beta A'^1)$ $A^1=\frac{A'^1+(v/c)A'^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\gamma(A'^1+\beta A'^0)$

4. 常见固有量
固有时 $\Delta x=0$ 的系：$d\tau=\frac{dt}{\gamma}$ 变慢
固有长度：$\Delta t=0$ 的系 $L=\frac{L_0}{\gamma}$ 收缩 不变

5. 洛伦兹速度变换
$V_x=\frac{dx'+vdt'}{dt'+(v/c^2)dx'}=\frac{V_x'+v}{1+v/c^2\,V_x'}$
$V_y=\frac{V_y'}{1+\frac{vV_x'}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$
$V_z=\frac{V_z'}{1+\frac{vV_x'}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

6. Minskwoki 空间中的几何（协变形式）（寻找不变量）
* 为了使空间中的形式简单，定义协变分量
有 $s^2=x^\alpha x_\alpha$
$x_0=x^0$ $x_1=-x^1$ $x_2=-x^2$ $x_3=-x^3$
$A_0=A^0$ $A_1=-A^1$ $A_2=-A^2$ $A_3=-A^3$
* 度规 $g_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$ $g_{ij}=e_i\cdot e_j$ $g^i_j=g_i^{\ j}=\delta$ 则 $\overleftrightarrow{I}=g^i_j$
* $\langle A;B\rangle=A^\alpha B_\alpha=A_\alpha B^\alpha$
* 协逆变换 $F_{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}F^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}$
* Lorentz 不变量：$\Delta\tau$ $A_\alpha B^\alpha$ c ds^2 $dtdV$ $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ $|A_0|$（空间在各个指标都不变）
四维速度向量：$\frac{dx^\alpha}{d\tau}=u^\alpha$
* 梯度：$\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}=(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t},\nabla\Phi)$ 协变
$\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}=(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t},-\nabla\Phi)$ 逆变
Laplace: $\partial^\alpha\partial_\alpha\Phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi$
散度：$\partial_\alpha A^\alpha=\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}$
速度：$u^\alpha=\frac{dx^\alpha}{d\tau}=\begin{cases}\gamma c & \alpha=0\\ \gamma v^\alpha & \alpha\neq0\end{cases}$
$|u^\alpha|=c^2$
PS: 分量式与四维形式应灵活使用（展开 or 合成）
PS: 在求解粒子的情况下有三个不同的γ，请区分γ

7. 常见例子
* 双生子佯谬 $(\gamma=\frac{5}{3})$



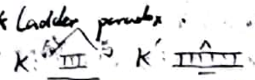
出发后速度为 $\frac{3}{5}c$，到达后立刻返回，$\frac{3}{5}c$，到达后 [illegible]
记住，改变一定要在对应系中时间 =0 的事件（同时的）
不同系对同时的事件判断不同
本题中有三个事件（无需转向不改变时空坐标）

	地球	$\overrightarrow{\frac{3}{5}c}$	$\overleftarrow{\frac{3}{5}c}$
出发	(0,0)	(0,0)	(0,0)
到达X	(12cy,15y)	(0,9y)	[illegible]
返回地球	(0,30y)	(——)	[illegible]

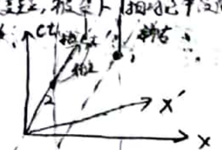
$t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\gamma}=\frac{5}{3}\times18=30y$

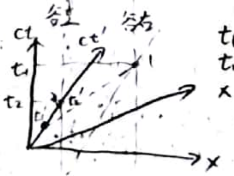
(1) 哥哥 $30y+21y=51y$ (3) $(12cy,15y)$
(2) $12cy$（对X的） (4) $(0,9y)$
新定义下的 (5) $(9cy,41y)$ (6) $9y\to41y$ $30y$
(7) $9y=\frac{5}{3}\times t\Rightarrow t=\frac{27}{5}y=5.4y$
$41y=\frac{5}{3}t\Rightarrow t=\frac{123}{5}=24.6y$
PS 此问也可用洛伦兹变换得到的 $t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)$ ✓
(8) 改用 $\frac{3}{5}c$ 后，由相对时间（这是一个新的事件）
$\Delta t=\frac{\Delta\tau}{\gamma}=9y\times\frac{3}{5}=5.4y$
$24.6y+5.4y=30y$ 与 (1) 相同。
PS: (1)(8) 的关键是 $\Delta t=\gamma\Delta\tau$ $\Delta\tau=\gamma\Delta t$

* Ladder paradox



从 K 看，梯子被关了，K' 看梯子前门开，但梯子被挡后快，
其主要，梯子下 [illegible]





$t_1>t_2$
$t_1'<t_2'$

第三章 自由粒子运动

1. 最小作用量原理

$S=\int L\,dt \quad \delta S=0$

prop. ① dS，S是标量，L不是（Lorentz不变）

② L，S对粒子系统不唯一 { 不依赖 / 全导数项 }

2. 经典自由粒子 $L(t,\vec r,\vec v)$

时空均匀，各向同性 $\Rightarrow L=L(|\vec v|)\triangleq L(v^2)$

取一个无穷小相对速度 $\vec\varepsilon$

$L(\vec v+\vec\varepsilon)^2=L(v^2+2\vec\varepsilon\cdot\vec v+\varepsilon^2)\approx L(v^2)+2\vec\varepsilon\cdot\vec v\frac{\partial L}{\partial v^2}$

要求 $2\vec\varepsilon\cdot\vec v\frac{\partial L}{\partial v^2}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{d\vec r}{dt}\cdot\nabla f(\vec r,t)$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v^2}2\vec\varepsilon=\nabla f(\vec r,t)$ （$\frac{\partial L}{\partial v^2}$只与$v$有关）

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v^2}=a \Rightarrow L=av^2\triangleq\frac{1}{2}mv^2$

3. 相对论粒子

要求 { S为Lorentz不变量 / 低速下给出经典的自由粒子 }

猜：$S=\int_a^b a\,d\tau$

$\Rightarrow L=a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$\vec p=\frac{\partial L}{\partial\vec v}=\frac{m\vec v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m\vec v$

$E=\vec v\cdot\vec p-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma mc^2 \quad E_k=(\gamma-1)mc^2$

PS：质量守恒不成立！

四维动量：$p^\alpha=(\frac{\varepsilon}{c},\vec p)$

有Lorentz变换 ✓ $\quad p^\alpha p_\alpha=\frac{\varepsilon^2}{c^2}-p^2$ 的值不变

对于光子，$\varepsilon=\hbar\omega$ $\vec p=\hbar\vec k$ $\Rightarrow\omega,\vec k$ 关系（色散关系）

$|p^\alpha|=\frac{\varepsilon^2}{c^2}-p^2=m^2c^2\Rightarrow\boxed{\varepsilon^2=p^2c^2+m^2c^4}$

当$\varepsilon\gg$时 $\varepsilon=pc$

4. 协变形式相对论粒子

在四维空间中找到真实路径 $x^\alpha\to x^\alpha+\delta x^\alpha$

$S=-mc^2\int_a^b d\tau=-mc\int_a^b\sqrt{dx_\alpha dx^\alpha}$

$\boxed{\delta\sqrt{dx_\alpha dx^\alpha}=\frac{dx_\alpha\delta dx^\alpha}{ds}=\frac{u_\alpha\delta dx^\alpha}{c}}$ $\quad \delta ds=\frac{u_\alpha\delta dx^\alpha}{c}$

$\delta S=-mu_\alpha dx^\alpha\Big|_a^b+m\int_a^b\delta x^\alpha\frac{du_\alpha}{d\tau}d\tau=0$

$\Rightarrow\boxed{\frac{du^\alpha}{d\tau}=0}$ 四维空间中匀速

第四章 外场中的电荷运动

1. 耦合系统的作用量

$L=L_1+L_2+L_c \quad L_c=\partial q_2$

在给定场中，只有L_p与L_c

耦合作用量：$\boxed{S_{pf}=-\int_a^b qA_\mu dx^\mu}$（与路径有关）

$S=-\int_a^b(mc^2+qA_\mu u^\mu)d\tau$

$L=-\frac{1}{\gamma}(mc^2+qA_\mu u^\mu)=-\frac{1}{\gamma}mc^2+q(\vec A\cdot\vec v-\varphi)$

$\vec P=\frac{\partial L}{\partial\vec v}=\gamma m\vec v+q\vec A$

E-L：$\frac{d\vec p}{dt}=\underbrace{-q\frac{\partial\vec A}{\partial t}-q\nabla\varphi}_{\vec E}+q\underbrace{\vec v\times(\nabla\times\vec A)}_{\vec v\times\vec B}$

定义下 自然满足 $\nabla\cdot\vec B=0$ $\quad\nabla\times\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

2. 规范不变性

$\begin{cases}\varphi'=\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}\\ \vec A'=\vec A+\nabla f\end{cases}$ 即 $A'_\alpha=A_\alpha-\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$

可将电场分解成有源无旋与无源有旋：$E_T=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$，$E_L=-\nabla\varphi$

规范固定 { 库仑规范：$\nabla\cdot\vec A=0$（不协变） / Lorentz规范：$\nabla\cdot\vec A+\frac{\partial\varphi}{c^2\partial t}=0$ $\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}=0\right)$（协变的） }

3. 带电粒子运动

灵活使用$\vec p$，$\vec v$，ε之间的关系，对于垂直磁场方向，设

复数速度可以简化计算：$\tilde v=v_x+iv_y \quad \vec B\parallel\vec e_z$

4. 协变形式运动方程

$\delta S=-\int_a^b(mu_\alpha d\delta x^\alpha+qA_\alpha d\delta x^\alpha+q\,\delta A_\alpha dx^\alpha)$

$=\int_a^b(m\,du_\alpha+q\,dA_\alpha-q\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}dx^\beta)\delta x^\alpha$

$=\int_a^b\left[m\frac{du_\alpha}{d\tau}-q\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right)u^\beta\right]d\tau\,\delta x^\alpha$

定义 $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$ 电磁场张量，反对称张量

$\delta S=\int_a^b\left[m\frac{du_\alpha}{d\tau}-qF_{\alpha\beta}u^\beta\right]d\tau\,\delta x^\alpha$

$\Rightarrow\boxed{m\frac{du_\alpha}{d\tau}=qF_{\alpha\beta}u^\beta}$

代入 $A_\alpha=(\varphi/c,-\vec A)$ 可得$F_{\alpha\beta}$的分量

$F_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&E_x/c&E_y/c&E_z/c\\-E_x/c&0&-B_z&B_y\\-E_y/c&B_z&0&-B_x\\-E_z/c&-B_y&B_x&0\end{pmatrix}$

$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&-E_x/c&-E_y/c&-E_z/c\\&0&-B_z&B_y\\&&0&-B_x\\&&&0\end{pmatrix}$ $\quad\boxed{F^{i0}=-\frac{E^i}{c},\ F^{ij}=-\varepsilon^{ijk}B_k}$

分量方程：$\alpha=0$：$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt}=q\vec E\cdot\vec v$

$\alpha\neq0$：Lorentz方程

5. 电磁场的变换与不变量

由 $A^\alpha=(\frac{\varphi}{c},\vec A)$ 的变换得 φ与$\vec A$的变换

由 $F^{\alpha\beta}$ 的变换得

$E_x=E_x'$ $\quad E_y=\frac{E_y'+vB_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad E_z=\frac{E_z'-vB_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$B_x=B_x'$ $\quad B_y=\frac{B_y'-v/c^2E_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad B_z=\frac{B_z'+v/c^2E_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

（x方向速度！）

低速下：$\vec E=\vec E'+\vec B'\times\vec v$ $\quad\vec B=\vec B'-\frac{1}{c^2}\vec E'\times\vec v$

* 不变量

$\begin{cases}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Rightarrow c^2B^2-E^2=\text{inv}\\ e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\Rightarrow\vec E\cdot\vec B=\text{inv}\end{cases}$

四维Levi-Civita

若$\vec E\perp\vec B$，对其它系中均垂直，且存在一个系中使$\vec E=0$ / $\vec B=0$（简化）

大量化为$\vec E=0$，动力学方程

ex. 匀速运动带电粒子的场

K'：$\varphi'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$，$\vec A'=0$

K：$\varphi=\frac{\varphi'(\vec r')/c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $\frac{\text{以K'坐标表达}}{\text{变化为K内坐标}}$ $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-vt)^2+(1-v^2/c^2)(y^2+z^2)}}$

$A_x=\frac{v/c^2\,\varphi'(\vec r')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{v}{c^2}\varphi$

$A_y=A_z=0$

$\Rightarrow\vec E=-\nabla\varphi-\frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec e_x$

$=(1-\frac{v^2}{c^2})\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[(x-vt)\vec e_x+y\vec e_y+z\vec e_z\right]$

当前时刻的位矢（不是延迟！）

$=\frac{q\vec R}{4\pi\varepsilon_0R^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$

$\theta=\frac{\pi}{2}$时最大 $\quad E_\perp=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\gamma$ ← 场强

$\theta=0$时最小 $\quad E_\parallel=\frac{1}{\gamma^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$

v越大，$E_\parallel$越小，$E_\perp$越大

第五章 电磁场方程

1. 场的L方程 $\mathcal L=\mathcal L(\varphi,\partial\varphi)$

$\mathcal L$为Lorentz不变量

* 一维标量场：$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}-\frac{\partial\mathcal L}{\partial\varphi}=0$（简化）

* 三维标量场 $\varphi(x,y,z,t)$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}-\frac{\partial\mathcal L}{\partial\varphi}=0$

（利用 $\int\vec A\cdot\nabla\varphi\,dV=\oint\varphi\vec A\cdot d\vec S-\int\varphi\nabla\cdot\vec A\,dV$）无穷远处为0

ex. $\mathcal L=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ $\quad L_{pf}=-a\varphi(\vec x(t))\delta(\vec x-\vec x_p)\Rightarrow\Box\varphi=-a\delta(\vec x-\vec x_p)$

2. 矢量场的L方程 $A^\nu=A^\nu(x,y,z,t)$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}\right]-\frac{\partial\mathcal L}{\partial A^\nu}=0 \quad \nu=0,1,2,3$

对于电磁场 { L为标量 / 规范不变性 / 可叠加性 }

$\Rightarrow\mathcal L=-\frac{1}{4\mu_0c}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$

* 无粒子存在（用Lorentz规范）

在真空中传播速度为光速

$\Box A_\nu=0$

分量：$\begin{cases}(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\varphi=0\\(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\vec A=0\end{cases}$

* 给定粒子分布

$S_{pf}=-\int_a^b qA_\alpha dx^\alpha=-\int_V\frac{\rho}{c}A_\alpha(t,\vec x)\frac{dx^\alpha}{dt}d\Omega$

$\mathcal L_{pf}=-\frac{j^\alpha}{c}A_\alpha \quad j^\alpha\triangleq\rho\frac{dx^\alpha}{dt}=(\rho c,\vec j)$

（电荷与速度的乘积构成四维矢量）（反映了场的源与电流的关系）

$\mathcal L=-\frac{1}{4\mu_0c}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-\frac{1}{c}j^\alpha A_\alpha$

E-L：$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=\mu_0j^\nu$

洛伦兹规范化：$\boxed{\Box A_\nu=\mu_0j_\nu}$

分量：$\begin{cases}(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nu=0\\(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\vec A=\mu_0\vec j & \nu=1,2,3\end{cases}$

3. 场方程的$\vec E$，$\vec B$形式

利用Lorentz规范：

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec A=0$

$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\varphi=\nabla\cdot(-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\nabla\varphi)\Rightarrow\boxed{\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

同理 $\boxed{\nabla\times\vec B=\mu_0\vec j+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec E}{\partial t}}$

结合内禀的两个方程，Maxwell方程已完整给出

4. 连续性方程与场的能动量

$\frac{\partial\rho_x}{\partial t}+\nabla\cdot\vec F_x=S \quad\vec F_x=\rho_x\vec v_x$

S为源（>0）/汇（<0）

$\Rightarrow$能量：$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot\vec P=-\vec E\cdot\vec j$ （能量密度）

动量：$\frac{\partial\vec g}{\partial t}+\nabla\cdot\overleftrightarrow{G}=-(\rho\vec E+\vec j\times\vec B)$

能流形式：

$\vec j\cdot\vec E=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec B-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t})\cdot\vec E$

$=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec E\times\vec B)-(\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t})$（展开）

对比得 能量密度 能流密度：$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\\ \vec P&=\frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B\ \text{（玻印廷矢量）}\end{aligned}}$

$-\rho(\vec E+\vec v\times\vec B)=-\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec E)\vec E-\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec B)\vec B+\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}\times\vec B$

$=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec E\times\vec B)-\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec E)\vec E-\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec B)\vec B$

$-\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec B)\times\vec B+\varepsilon_0\vec E\times(\nabla\times\vec E)$

利用 $\boxed{\vec E\times(\nabla\times\vec E)=(\nabla\cdot\vec E)\vec E-\nabla\cdot(\vec E\vec E-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I})}$

同理$\vec B$

令 $\boxed{\overleftrightarrow{\Upsilon}=\left[\varepsilon_0\vec E\vec E+\frac{1}{\mu_0}\vec B\vec B-\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)\overleftrightarrow{I}\right]}$

则 $-\rho(\vec E+\vec v\times\vec B)=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec E\times\vec B)-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Upsilon}$

动量密度、动量流密度：$\boxed{\begin{aligned}\vec g&=\varepsilon_0\vec E\times\vec B\\ \overleftrightarrow{G}&=-\overleftrightarrow{\Upsilon}\end{aligned}}$ 对角分量表示正压力，非对角元表示剪应力（麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$）

解释 T_{ij} 为i向面元单位面积受力在j方向的分量

也可压强

所以导体表面受压强用$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$计算

且 $\rho\vec E+\vec j\times\vec B=\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$ 单位体积受力

$\vec F=\iiint\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}dV=\oiint\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec S$

PS：灵活选取∂V，可以简化计算（无穷大平面）

$\vec E$，小一… 直接取面的

* 能量-动量张量（统一$\vec G$与ε）

$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}\partial^\nu A_\lambda-g^{\mu\nu}\mathcal L$（不唯一，$\tilde T^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}+\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$）

有 $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=0$，代表守恒量

电磁场中：$\tilde T^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\lambda}F_\lambda^{\ \nu}+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right]$（对称）

$\tilde T^{00}=\varepsilon \quad\tilde T^{0i}=\frac{1}{c}\frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B \quad\tilde T^{ij}=\overleftrightarrow{G}$

第六章 静电场

1. 静电场方程

回顾：$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$点电荷场$\Rightarrow$总场：$\varphi=k\int\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV$

* Green函数 $\nabla^2G=\delta(x-x')$ $\Rightarrow\nabla^2\left(\int G(x,x')\rho(x')dV\right)=\rho(x)$（分离源和场）

2. 静电场能量

$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R^3}E^2dV=-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R^3}\nabla\cdot(\vec E\varphi)dV+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R^3}\varphi\nabla\cdot\vec E\,dV$ （面积分趋于0）

$=\frac{1}{2}\int_{R^3}\rho\varphi\,dV$（证明了场能与相互作用能的等价性）

离散点电荷（互能）

$U=\frac{1}{2}\sum\frac{q_aq_b}{4\pi\varepsilon_0r_{ab}}$

$x'\ll x$ 场点远大于源区

3. 近似计算（多极展开）（对于局限在区域内的电荷分布）

$\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum q\vec x'\cdot\nabla\frac{1}{r}$

$=\frac{\vec p\cdot\vec r}{4\pi\varepsilon_0r^3}$ 一阶偶极子

当$Q\neq0$时 $\vec p$为不变量（与原点无关）

$\varphi^{(2)}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum q x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\frac{1}{r})$

$=\frac{D_{ij}}{24\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}$ $\quad D_{ij}\triangleq\sum q(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})$ 电四极矩

* 电偶极子场

$\vec E^{(1)}=\frac{3(\vec n\cdot\vec p)\vec n-\vec p}{4\pi\varepsilon_0r^3}$ $\begin{cases}p\frac{3\cos\theta-1}{4\pi\varepsilon_0r^3}, & z\\ p\frac{3\cos\theta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0r^3}, & \perp\end{cases}$ $\quad\begin{cases}p\frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^3}, & r\\ p\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0r^3}, & \theta\end{cases}$

4. 外场中的电荷体系 $\varphi(\vec x)$的Taylor展开

展开 $U=\sum q\varphi(\vec x)$

$U^{(0)}=Q\varphi(0)$ $\quad U^{(1)}=\sum q\vec x\cdot(\nabla\varphi)_0=\vec p\cdot\nabla\varphi=-\vec p\cdot\vec E(0)$

$\vec F=Q\vec E(0)+(\vec p\cdot\nabla)\vec E$ ← 利用了$\nabla(\vec p\cdot\vec E)=(\vec p\cdot\nabla)\vec E$

$\vec M=\vec p\times\vec E(0)$

5. 介质的极化

* 非极性分子：$\vec p=\alpha\vec E$

* 极性分子 $\vec M=\vec p\times\vec E$

* 极化介质的场 dV，极化强度 $\vec P=\frac{d\vec p}{dV}$

$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec P\cdot\vec R}{R^3}dV'$（对于球外远处展开，对于体内不再适用）

$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\vec P\cdot\nabla'(\frac{1}{R})dV'=k\oint\frac{\vec P\cdot d\vec S}{R}-k\int\frac{\nabla'\cdot\vec P}{R}dV'$

束缚面电荷：$\sigma=\vec P\cdot\vec n$ $\quad$ 体电荷：$\rho=-\nabla\cdot\vec P$

* 平均场（利用$qE_{ave}=F_{ave}$）（分球内球外讨论）

介质内某一点的场定义为以该点为球心的小球内的平均电场，上式可以一致使用

* 线性介质 $\vec P=\varepsilon_0\chi_e\vec E=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec E$ 且 $\rho_p=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_f$

6. 边值问题

* $\nabla^2\varphi=0\Rightarrow$ { 平均值 $\varphi(\vec x)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint\varphi\,dS$ / 最值原理（用于/唯一性定理证明） }

* 唯一性定理

第一：ρ在边界上给定（或已无穷远边界条件） $\quad$ 第二：V被导体/绝缘包围，V内给定，导体上电荷给定

$\to\nabla\cdot(\varphi_3\vec E_3)=-E_3^2<0$

$\int\nabla\cdot(\varphi\vec E)dV=0$

* 边界条件

$\varphi_1=\varphi_2$，$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$

* 球坐标下Laplace方程通解（轴对称）

$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$

$\|P_l(\cos\theta)\|=\frac{2}{2l+1}$ $\quad P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x \quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$

* 介质球 $\vec E=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec E_0$

$\varphi_{in}=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0r\cos\theta$