PART I 线性PDE理论

1. 齐次pde的解构成线性空间(叠加式) (齐次方程)
2. 通解：n阶pde含有n个任意函数的解，全部定下即为特解
   一般pde的通解很难求得，常根据定解条件与物理意义求得特解
3. 定解条件：反映物理现象的初始与周围环境的制约 (描述方程边界……)
4. 三类定解问题：初值、边值、混合
   $u, \frac{\partial u}{\partial t}$ …… 三类 $\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma$，第三、……
   一般地 L为n阶，对初值问题给定n个条件 $u_t \cdots u_{x}$ ……
5. 叠加原理 — 基于L是线性算子
   ① 有限叠加 $L(\sum c_i u_i)=\sum c_i f_i$ 采用齐次与非齐次叠加
   ② 级数叠加 以级数叠加(关于级数收敛性)
6. 齐次化原理 — 将非齐次转化为齐次，便于求通解

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,x), & (t>0)\\ u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\cdots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}|_{t=0}=0\end{cases}$$

其解 $u(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau$

w满足：
$$\begin{cases}\frac{\partial^m w}{\partial t^m}=\cdots & (t>\tau)\\ \frac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau}=f(\tau,x)\end{cases}$$

令 $t'=t-\tau$，可转为 $t'=0$ 的问题，代入通解即可

PART II 齐次方程通解及求解问题 —— 叠加原理→Fourier分析

1. 一阶线性(直式·方向导数)

ODE: $y'+p(x)y=Q(x) \Rightarrow y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+C\right)$

PDE: $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y)$

所作的事情就是，能否通过代换将问题简化？

设 $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ $J\neq0$

$\Rightarrow (a\frac{\partial\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\xi}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial\xi}+(a\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\frac{\partial\eta}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f$

求 $a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ 的解: $\nabla\varphi\cdot(a,b)=0$

特征线(方向线)方程: $(dx,dy)//(a,b)$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}}$ → 求出一次积分 $\varphi(x,y)=C$ 即得原式的一个解

PS: 一定要表示为隐式 e.g. $y+x=C \Rightarrow \varphi(x,y)=y+x$

特殊化: $c=f=0 \Rightarrow u=g(\xi)=g(\varphi(x,y))$ 此时u可以为任意函数

(求后可能还需要对g进行讨论)

* n维情况

由 $\frac{dx_1}{a_1}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}$ n-1个特征方程 → n维空间中的n-1维曲线

3维: $\varphi(x,y,z)=C_1$, $\psi(x,y,z)=C_2$ ⇒

2. 可分解的二阶线性 — 类似方法

$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x})u=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial\xi}{\partial t}+a\frac{\partial\xi}{\partial x}=0 \Rightarrow \xi=x-at\\ \frac{\partial\eta}{\partial t}-a\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \Rightarrow \eta=x+at\end{cases}$ $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Rightarrow u=f(x-at)+g(x+at)$ (行波)

3. 二阶线性方程分类

通过自变量代换化简方程，利用特征性分类

$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0$

设 $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ $J\neq0$

$\Rightarrow A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu=0$

其中 $A_{11}=a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2$

$A_{12}=a_{11}\varphi_x\psi_x+a_{12}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+a_{22}\varphi_y\psi_y$

$A_{22}=a_{11}\psi_x^2+2a_{12}\psi_x\psi_y+a_{22}\psi_y^2$

希望有一个φ使 $A_{11}=0$，以达到 A_{11} A_{22} 相同形式

对于一阶非线性pde，引用特征线法

$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0$ (代入了 $\varphi_x=-\varphi_y\frac{dy}{dx}$)

$\Leftrightarrow \boxed{a_{11}(\frac{dy}{dx})^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0}$ (二阶特征方程)

$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ (可证Δ在代换后符号不变，是固有性质)

① $\Delta>0$ 双曲型 $A_{11}=A_{22}=0$ 一般代入

$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \Rightarrow \varphi(x,y)=h_1$, $\psi(x,y)=h_2$

$\Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+C_1u_\xi+C_2u_\eta+C_3u=0$ (标准形 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial s^2}+\cdots$) 令 $t=\frac{\xi+\eta}{2}$ $s=\frac{\xi-\eta}{2}$

② $\Delta=0$ 抛物型 $A_{11}=0$ $A_{22}\neq0$ $A_{12}=0$ 去代入

$\Rightarrow$ 标准形: $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\cdots=0$

③ $\Delta<0$ 椭圆型 $\begin{cases}\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=h_1\\ \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=h_2\end{cases}$ $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$

$\Rightarrow A_{11}=A_{22}$ $A_{12}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\cdots=0$ 二维调和

小结：1~3 讨论了一阶和二阶线性的通解求法，主要思路为变量代换，并利用特征线建立ode与pde联系。但是总之，这些方法对求解有限制，比如 $\Delta_n u=0$ 无法用特征方法求通解，并且实际应用也无需通解，只要求有边界条件下的解即可。故下面结合边界，利用叠加原理下的Fourier方法得到有条件的"通解"

4. 有限Fourier分析 — 分离变量法

PS: 解不一定都可分离变量，但依据S-L，必可以由分离变量的有效解叠加组合而成，故直接求分离形式即可！ 组成解不一定可分离变量

pde求解 → ode求解问题

对于规则边界及合适的边界条件，可采用分离变量的方法 不依赖边界条件(边界周期问题)

* 常见固有值问题

① $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=0 \quad y(l)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2 & n=1,2\cdots\\ y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}$

② $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=0 \quad y'(l)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2 & n=0,1\cdots\\ y_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}\end{cases}$

③ $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=0 \quad y'(l)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2 & n=0,1\cdots\\ y_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\end{cases}$

④ $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=0 \quad y(l)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2 & n=0,1\cdots\\ y_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(x)=y(x+2l)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2 & n=0,1,\cdots\\ y_n(x)=\begin{cases}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}\end{cases}$

(PS 注意周期 …… $(-\infty,+\infty)$ ……)

PS: 注意当出现新的固有值问题时，一定要按S-L Thm的模式进行，即要找到ρ(x)，才能正交展开

* S-L型方程 (理论)

对一般的二阶ode

$b_0(x)X''(x)+b_1(x)X'(x)+b_2(x)X(x)+\lambda X(x)=0$

同乘 $\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}\exp[\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx]$ 配全导数

$\Rightarrow [k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0$ (S-L标准形式)

$k(x)=\exp[\int\frac{b_1}{b_0}dx]$ $q(x)=-\frac{b_2}{b_0}k(x)$ $\rho(x)=\frac{k(x)}{b_0}$ (权函数)

附加条件：

● $k(x)\in C^1[a,b]$ $\rho(x)\in C[a,b]$ (a,b)上 $k(x),\rho(x)>0$, $q(x)\geq0$

且 $q(x)\in C(a,b)$ 在端点处至多一阶极点

① $k(a)>0$ ($k(b)$) 且 $q(x)$ 在端点C ⇒ 可附加三类边界条件(以a处为例，b处同理)

② $k(a)=k(b)>0$ ⇒ 可附加周期性条件 $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ (即 $y(x)=y(x+b-a)$)

③ $k(x)$ 在a,b中某端为0 (零点) ⇒ 可附加自然边界条件 $|y(x)|<+\infty$

可以证明，此时 L_x 算子为 $L^2_\rho[a,b]$ 上 C^2 且满足边界条件的自共轭算子

PS: 自共轭算子在有限维中对应实对称矩阵，且特征向量正交，完备，这里是无限维推广

Thm (S-L)

① 可数性：可数无穷个固有值 $\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$

且除了周期性条件外，每个 λ_n 只有一个固有函数 (周期的有两个线性无关函数)

② 非负性 $\lambda_n\geq0$ =0的充要条件 $q(x)=0$ 且在a,b不取一、三类条件 (可取周期性条件)

③ 正交性(带权!!!)

④ 完备性 任意 $f(x)\in L^2_\rho[a,b]$ (均方收敛)

5. 无界Fourier分析 — 积分变换法

* 与分离变量法的比较

分离变量是求固有函数，然后再求系数；而积分变换则是已知积分核(固有函数)直接求系数。所以积分变换法不必求固有函数，但是分离变量法求解是相同的。所以积分变换只有条件使用，也不存在不可用

S-L Thm 保证反变换的存在。可以说：固有函数系 ↔ 积分核；傅里叶系数 ↔ 像函数

1) Fourier变换 — 无界区域可用

prop. ① 延迟 $F[f(x)e^{i\lambda_0 x}]=\hat f(\lambda-\lambda_0)$ $F[f(x-x_0)]=\hat f(\lambda)e^{-i\lambda x_0}$

② 微分 $F[f'(x)]=i\lambda\hat f(\lambda)$ $f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=\cdots=f^{(n-1)}(\pm\infty)=0$

③ 积分 $F[\int_{-\infty}^x f(\xi)d\xi]=\frac{1}{i\lambda}\hat f(\lambda)$ ④ 相似 $F[f(ax)]=\frac{1}{|a|}\hat f(\frac{\lambda}{a})$

⑤ 反射 $F[\hat f(\lambda)]=2\pi f(-\lambda)$ $F[\hat f'(\lambda)]=-ixF^{-1}[\hat f(\lambda)]$

* $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$

$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t})$

PS: 千万不要记混，F的定义域对称，不要F用x，F^{-1} 用c！ (L[]通过)

PS: 非齐次 f(t,x) 无需完全形式，因为最后一次会还原！用了卷积即可

PS: 反变换不易求的，积分变换可以用查表方法

PS: 定义和性质要记熟

PS: 积分过程中尽量记为 $e^{i\lambda x}$，少用cos sin

* 高维Fourier变换 (可以应用于拉普拉斯 Δ_3)

$\hat f(\lambda,\mu,\nu)=\iiint_{R^3}f(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dv$ $f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R^3}\hat f e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda$

$F[\Delta_3 f]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)F[f]$

$f*g=\iiint_{R^3}f(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)g(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$

* 正弦余弦变换 $[0,+\infty)$ 可延拓至 $(-\infty,+\infty)$ ($\lambda>0$)

正: $F_s(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx$ $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$

只可用在 $u(t,0)$ =已知时，$F_s[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}]=\lambda u_0-\lambda^2\hat u$

余: $F_c(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx$

$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$

prop: 小心 $\hat x$，用λ，可以作为系数的理解

2) Laplace变换 — 要求初值条件齐全，要求不齐不可用.

prop. ① 本函数积分: $L[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{\tilde f(p)}{p}$

② 延迟定理: $L[f(t-\tau)]=L[f(t-\tau)H(t-\tau)]=e^{-p\tau}\tilde f(p)$, $\tau>0$

PS: 切记L变换中H(t)的存在，延迟时不可忘记！ $f(t)H(t)$

PS: 不要的有理分母上有些函数直接求逆，还是要分拆(待定也行)

小结: Fourier: 全直线　正弦: 半直线，有一类条件

余弦: 半直线，有二类条件　Laplace: 半直线，全条件

PART III 非齐次问题

主要思想:

① 齐次化原理

② 特解法

③ Fourier分析法

④ 分解非齐次主要处理 — 基本解法

PS: ode齐次化只需要把原方程变成齐次即可

PS: Fourier分析是一种通法，每个方向都能用，只要注意求解可用

1. 一般非齐次混合问题

边界条件如果非齐次，必须优先处理 (齐次化)

比如 $(\alpha_1u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x})|_{x=0}=g_1(t)$ $(\alpha_2u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x})|_{x=l}=g_2(t)$

可设一特解为 $v(t,x)=A(t)x+B(t)$ 得一个线性方程组

若无解，则设 $v(t,x)=A(t)x^2+B(t)$

则 $u=w(t,x)+v(t,x)$ $w(t,x)$ 满足边界齐次问题

PS: 大多数情况下全使边界方程不齐次，u特解可以取齐次 比如 $u(t,0)=0$ $u(t,l)=\sin\omega t$ 的情况，就可设 $v=X(x)\sin\omega t$ 此时就是 sin sin 型解很重要

2. 基本解方法 —— 点源函数法，可用一些简单解来表示的解 (Green)

1) δ函数 广义函数 — C(R)上的线性连续泛函，作C(R)的对偶空间

集中分布.

prop. ① $\delta^{(n)}(x)\varphi(x)=\varphi^{(n)}$ ② $F[\delta(x)]=1$ $F[1]=2\pi\delta(x)$

④ $\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)}{2|a|}+\frac{\delta(x+a)}{2|a|}$ $\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$

$|a|\delta(ax)=\lim|a|\delta(a^2x)=\delta(x)$

⑤ 导数 $\langle\delta^{(n)}(x),\varphi(x)\rangle\overset{def}{=}(-1)^n\langle\delta(x),\varphi^{(n)}(x)\rangle$

⑥ $\int_{-\infty}^x\delta(\xi)d\xi=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}=H(x)$

⑦ $L(f(x)*g(x))=(Lf)*g=f*Lg$

⑧ 展开: $a_n=\frac{1}{\pi}\cos n\xi$ $b_n=\frac{1}{\pi}\sin n\xi$

$\forall\varphi(x)\in C_0^{\infty}(R)$

$\delta(-x)=\delta(x)$

$x\delta'(x)=-\delta(x)$

高维 $\delta(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$

极坐标 $\delta(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0)$

2) 基本解方法 [illegible]

$\Delta_3 u = f(x,y,z) \longrightarrow \Delta_3 U = \delta(x,y,z)$

Thm: $u(M) = U(M) * f(M)$ 是 [illegible] 的解 (不唯一)

求法: 利用 δ 的 [illegible] or 球对称性 (径向性)

$\Delta_3 u = \delta(x,y,z) \longrightarrow U = -\frac{1}{4\pi r}$

$\Delta_2 u = \delta(x,y) \longrightarrow U = -\frac{1}{2\pi}\ln r$

3) 边值问题的 Green 函数法 (椭圆方程)

def $\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0) \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

$G(M,M_0)$ 为 椭圆方程第一边值问题的 Green 函数

prop (对称性) $G(M_1,M_2) = G(M_2,M_1)$

Green 公式

$\oint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iiint u\Delta v\, dV + \iiint \nabla u\cdot\nabla v\, dV$

$\oint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \iiint (u\Delta v - v\Delta u)\, dV$

Thm. 椭圆方程的解 (无边界 [illegible])

$u(M) = \int f(M_0) G\, dM_0 + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n_0} dS_0$

$= \int f(M_0) G\, dM_0 - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n_0}dS_0$

边界向外法向

求 Green 函数的方法

① 镜像法

ex $\begin{cases} \Delta_3 u = 0 & z>0 \\ u|_{z=0} = \varphi(x,y) \end{cases} \xrightarrow{\text{Poisson}} u(1,2,5) = \frac{5}{2\pi}\iint_{R^2}\frac{\varphi(x,y)}{[(x-1)^2+(y-2)^2+25]^{3/2}}dS$

ex 圆形区域: 注意 要在 M_0 关于圆的对称点 M_1 处放上点电荷 [illegible] 一个常数 C 用于平衡

$\Rightarrow G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \ln\frac{R}{\rho_0 r(M,M_1)}\right]$

Poisson $u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta_0)}d\theta_0$

ex 球内:

$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi}} - \frac{R}{\sqrt{r^2\rho^2+R^4-2R^2\rho r\cos\psi}}\right)$

Poisson: $u(M) = \frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi)^{3/2}}\Phi(\theta,\varphi)dS$.

② 保角映射法

$D \to |w|<1$ 则 $G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z)|}$

$z_0 \to w=0$

$\left|\frac{e^z-e^{z_0}}{e^z-e^{\bar z_0}}\right|$

当然也可以从其它区域 [illegible] 出发

上半平面 → 上半平面 $G^* = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M^*,M_1^*)}{r(M^*,M_0^*)} = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^*-\bar z_0^*}{z^*-z_0^*}\right|$

$= \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^2-\bar z_0^2}{z^2-z_0^2}\right|$

i 改写为复数形式

ii 将所有变量变回旧值 ($R, z, \bar z_0, \rho \cdots$)

一般变换与镜像法同时使用.

4) 初值问题基本解:

i $u_t = Lu$: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = LU & t>0, M\in R^n \\ U|_{t=0} = \delta(M) \end{cases}$ U 为基本解

$\Rightarrow u(t,M) = U(t,M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t-\tau,M) * f(\tau,M)\,d\tau$.

ii $u_{tt} = Lu$

$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = LU & t>0, M\in R^n \\ U|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = \delta(M) \end{cases}$

利用 $v = \int_0^t u\, d\tau$ [illegible]

得 $u(t,M) = U(t,M) * \psi(M) + \frac{\partial}{\partial t}(U(t,M) * \varphi(M))$

$+ \int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\,d\tau$

PART IV 具体方程讨论

双曲方程 — 行波法 [illegible]

椭圆方程 — 有 [illegible]

1. 欧拉方程 ode

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = 0$

设 $t = \ln x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0$

$u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$ 令 $v = ru$

PS: 切记方程是可以变量代换的, 按为齐次

一阶导消去: 设 $u = e^{\lambda(x)}v(t,x)$ 令一阶项 $=0$ 得 λ

2. 波动方程

无界弦初值问题达朗贝尔

$u(t,x) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$+ \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi$ 也可用齐次化原理

2) 半无界弦 — 延拓法

由 d'Alembert 公式 $\varphi(x)$ $\psi(x)$ 均要延拓; 奇延拓, 偶延拓

故根据 $u(t,0)$ 的 [illegible] 延拓

3) 球对称问题: 此处讨论 D_3 设 $u = u(t,r)$

$u(t,r) = \begin{cases} \frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at)] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi, & t<\frac{r}{a} \\ \frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) - (at-r)\varphi(at-r)] + \frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi, & t>\frac{r}{a} \end{cases}$

球面波解! $u(t,r) = \frac{1}{r}[f(r-at) + g(r+at)]$ $v = ru$

4) 两端固定弦

$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

5) 三维波动基本解 (无边界) $u_{tt} = Lu$

$U = \frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}$

3. 热传导方程

基本解: $U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$

4. 椭圆方程

$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 & r<a \\ u|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$ 极坐标分离变量

$\Rightarrow \boxed{u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2}\ln r + \sum_{n=1}^{+\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)}$

$\Rightarrow$ Poisson ✓

故圆内解为 $\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta)$

扇形: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ $\Theta_n(\theta) = \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$

($u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$) $\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$.

PS: 椭圆方程的基本解只有通式和特殊方法, 非齐次问题不要忘记.

5. 高维方程 — 特殊函数

高维分离变量, 会出现变系数 ode, 解为特殊函数

如 $u_{tt} = a^2\Delta u \Rightarrow \Delta_3 v + k^2 v = 0$ (Helmholtz)

i 直角坐标系 全部 x, y 上都有固有函数 [illegible]

$u = \sum(C_{mn}\operatorname{ch}\nu_{mn}z + D_{mn}\operatorname{sh}\nu_{mn}z)\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{(2n+1)\pi}{2b}y$

二元固有函数

[illegible] $P(x)Q(y)$

ii 柱坐标:

$(rR')' + \left(\lambda r - \frac{\nu^2}{r}\right)R = 0 \Leftrightarrow r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \nu^2)R = 0$

设 $x = \sqrt{\lambda}r \Rightarrow \boxed{x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0}$ ν 阶 Bessel

→ Bessel 函数

iii 球坐标:

r: $\boxed{\frac{1}{r^2}(r^2R')' + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0}$ 球 Bessel

$k=0$ 时为 Euler 方程 (Laplace)

θ: 设 $x = \cos\theta$ $y(x) = \Theta(\arccos x)$ $\mu = m^2$

$\boxed{[(1-x^2)y']' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0}$ m 阶连带 Legendre 方程

$m=0$ 时 (轴对称) $\boxed{[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0}$ Legendre 方程 → Legendre 多项式

② ode 幂级数解 — 直接级数解不一定收敛, 用广义幂级数

2) Bessel 函数

由 Fuchs Thm, $x=0$ 是 Bessel 方程正则奇点, 故在 $0<|x|<+\infty$ 上有如下

级数解 $y(x) = x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

⇒ 代入 Bessel 方程比较系数

$\begin{cases} n=0: & a_0(\rho^2-\nu^2) = 0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \rho = \pm\nu \\ n=1: & a_1[(1+\rho)^2-\nu^2] = 0 \\ n\geq 2: & a_n[(n+\rho)^2-\nu^2] + a_{n-2} = 0 \end{cases}$

① $\rho = \nu \geq 0 \Rightarrow a_1 = 0$ $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}, n\geq 2$

$\Rightarrow a_{2k+1} = 0$ $a_{2k} = \frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(k+\nu+1)}a_0$

取 $a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \Rightarrow y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \triangleq J_\nu(x)$

第一类 ν 阶 Bessel 函数

仅有一个线性无关解

$\lim_{x\to 0}J_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \nu>0 \\ 1 & \nu=0 \end{cases}$

② $\rho = -\nu$

(i) $n-2\nu \neq 0 \Rightarrow y_2(x) = J_{-\nu}(x)$ → $\lim_{x\to 0}J_{-\nu}(x) = \infty$

(ii) $2\nu = 2m+1$ 令 $a_{2m+1} = 0$ 同理

(iii) $2\nu = 2m$ 此时有 $\boxed{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)}$ — 整数阶 Bessel 函数 相关

此时引入第二类 Bessel 函数 $N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(x) - \frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(x)$ (Neumann 函数)

$\Rightarrow \forall\nu\geq 0 \Rightarrow y(x) = CJ_\nu(x) + DN_\nu(x)$ $0<|x|<+\infty$.

有 N_ν 在 0 处 → ∞

半奇数阶

$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ $N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

$N_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

prop.

① 递推公式 $J_0' = -J_1$ → 整数阶可由 J_0, J_1 表示

$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m(x^{\nu}J_\nu) = x^{\nu-m}J_{\nu-m}$

$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m(x^{-\nu}J_\nu) = (-1)^m x^{-(\nu+m)}J_{\nu+m}$

② 渐近性: $\lim_{x\to+\infty}J_\nu = \lim_{x\to+\infty}N_\nu = 0$

$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}})$

$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}})$ 无穷多零点

$J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$

③ 母函数与积分表示 (整数阶) $e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\zeta^n$

从母函数可以证明

可证 Bessel 加法公式

$\boxed{J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}}{\zeta^{n+1}}d\zeta}$ 取 $C: e^{i\theta}$

→ Bessel 固有值问题 $x = \omega r$ $\lambda = \omega^2 > 0$

$\Rightarrow R_\nu(r) = CJ_\nu(\omega r)$ 代入边界条件 $\alpha R(a) + \beta R'(a) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha J_\nu(\omega a) + \beta\omega J_\nu'(\omega a) = 0}$

i $\beta = 0$ (第一类) $\lambda_n = \omega_{n}^2$ ω_n 是 $J_\nu(\omega a)$ 的正零点, 固有函数为 $J_\nu(\omega_n r)$

ii $\alpha = 0$ (第二类) $\lambda_n = \omega_n^2$ ω_n 是 $J_\nu'(\omega a) = 0$ 的正根, 当 $\nu=0$ 时, 还有 $\lambda_0 = 0$

iii 第三类 $\lambda = \omega_n^2$ — —

$\{J_\nu(\omega_n r)\}$ $\{J_\nu(\omega_{2n} r)\}$ $\{J_\nu(\omega_{3n} r)\}$ 是带权 r 的正交基 $L^2[0,a]$

N_ν 舍去

3) Legendre 多项式

在 $x=0$ 的邻域 $|x|<1$ 有解析解 (Cauchy).

代入并令 x^n 系数为 0 设 $\lambda = l(l+1)$ $l\geq 0$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$

分别取 $a_0 = 0$ $a_1\neq 0$ 和 $a_0\neq 0$ $a_1 = 0$ 可得两线性无关解 $y_1(x)$ $y_2(x)$

我们希望有界 (在 ±1 处).

i $l\neq n$ y_1, y_2 为无穷级数, 在 ±1 处发散 (一定)

ii $l = n$ n 为偶 (奇) 时 y_1 (y_2) 为多项式

取 $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

$\Rightarrow P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$ Legendre 多项式

第一类 Legendre 函数

由 Liouville 公式 可得线性无关解 — 第二类 Legendre 函数 $Q_n(x)$

prop ① 微分表示: Rodrigues: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

② 积分表示: Schläfli: $P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_C\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$

Laplace: $P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + \sqrt{x^2-1}\,i\cos\theta)^n d\theta$

③ 母函数表示 $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n & |t|<1 \\ \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\left(\frac{1}{t}\right)^n & |t|>1 \end{cases}$

④ 奇偶性 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ ⑤ 特殊值 $P_n(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m+1 \\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!} & n = 2m \\ 1 & n=0 \end{cases}$

⑥ 零点: $(-1,1)$ 内有 n 个 (Rolle)

⑦ 递推公式

⑧ $P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $P_n(1) = 1$ $P_n(-1) = (-1)^n$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_n'(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶} \\ \frac{(-1)^m(2m+1)!!}{(2m)!!} & n \text{ 为奇} \end{cases}$

⑨ 模 $\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ (用母函数 [illegible])

⑩ 正交性 ⑪ $\int_{-1}^{1}x^m P_n(x)dx = \frac{m}{m+n+1}\int_{-1}^{1}x^{m-1}P_{n-1}dx$

且 $|P_n(x)|\leq 1$, $|x|\leq 1$

⑫ $\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & n = 2k & k\geq 1 \\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!} & n = 2k+1 & k\geq 1 \end{cases}$

PS $\int_{-1}^{1}P_n$ 由正交性 [illegible]

奇偶性、正交性、母函数

$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ $P_n'(-1) = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

→ Legendre 固有值问题

由 $k(x)|_{x=\pm 1} = 0$ 故附加 $|y(\pm 1)| < +\infty \Rightarrow \lambda_n = n(n+1)$ $n = 0, 1, \cdots$

$\{P_n(x)\}$

→ 轴对称的球面 Laplace

Legendre 方程 + Euler $\Rightarrow$ $\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}[C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta) \\ \text{球内 } C_n r^n \quad \text{球外 } C_0 + D_n r^{-(n+1)}}$

$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k P_k(x)$

利用对称 $\Delta_3 u = 0$ 通解