

卢瑟福散射

杨博涵

PB20000328

2022. 5. 10

摘要：本文先阐述了卢瑟福散射的实验背景，完整推导了库伦散射公式和卢瑟福散射公式。后根据卢瑟福采用的实验方案，测量 α 粒子束的强度及在空气中的射程，以及验证 α 粒子在金箔散射下的强度 N 与 $\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$ 成正比的关系，从而验证卢瑟福模型的正确性。

关键词：卢瑟福散射；大学物理实验； α 粒子；散射粒子

1 引言 (Introduction)

1.1 实验背景

卢瑟福散射实验是近代物理科学发展史中最重要的实验之一。1897年，汤姆逊提出了原子模型，他认为原子中的正电荷分布在原子整个空间，电子则嵌在布满正电荷的球内。但是很快卢瑟福等人的实验否定这一模型。1909年卢瑟福在 α 粒子和薄箔散射实验时观察到绝大部分 α 粒子几乎是直接穿过铂箔，但有大约 $\frac{1}{8000}$ 的 α 粒子的散射角大于 90° ，这一实验结果根本无法用公认的汤姆逊原子模型解释。卢瑟福等人经过两年的分析，于1911年提出原子的核式模型：原子中的正电荷集中在原子中心很小的区域内，而且原子的全部质量也集中在这个区域内。原子核的半径近似为 10^{-15}m ，约为原子半径的千万分之一。

卢瑟福散射实验确立了原子的核式结构，为近代物理的发展奠定了基石。本次实验就将重走卢瑟福当年的实验之路，验证卢瑟福模型的正确性。

1.2 实验原理

1) 库伦散射偏转角公式

设原子核的质量为 M ，具有正电荷 $+Z_1e$ ，并处于点 O ，而质量为 m ，能量 E ，电荷为 $+Z_2e$ 的 α 粒子以速度 v 入射，在原子核(靶核)的质量粒子的质量大得多的情况下，可以认为前者不会被推动， α 粒子则受库伦力的作用而改变了运动的方向，偏转 θ 角，如图 3.3-1 所示。图中 v 是 α 粒子原来的速度， b 是原子核离 α 粒子原运动路径的延长线的垂直距离，即入射粒子与原子核无作用时的最小直线距离，称为瞄准距离，如图 1-1 所示。

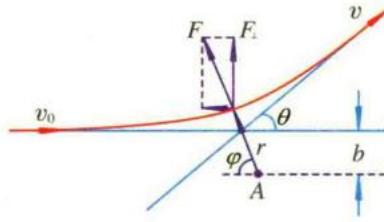


图 1-1 α 粒子在原子核的库仑场中路径的偏转

在 α 粒子运动的垂直方向 y 方向上, 由牛顿第二定律有

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \varphi$$

由冲量原理, 得

$$dv_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} dt = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\sin \varphi}{r^2} dt$$

再由角动量守恒, 可推出

$$mbv = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}, \Rightarrow dt = \frac{r^2}{vb} d\varphi$$

联立上两式

$$dv_y = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \sin \varphi \frac{r^2}{vb} d\varphi = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m vb} \sin \varphi d\varphi$$

两边分别积分

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m vb} \int_{\pi}^{\theta} \sin \varphi d\varphi$$

得

$$v_0 \sin \theta = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m vb} (1 + \cos \theta)$$

可得到库伦散射公式

$$b = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{z_1 z_2 e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 E} \cot \frac{\theta}{2} \equiv \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \text{ 其中 } a \equiv \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E}$$

2) 卢瑟福散射偏转角公式

我们已经得到 b 与 θ 的关系, 但是瞄准距离是人为引入的、不可测量的量, 无法与实验测量对应起来, 因此我们寻求用可测量的量来消去 b 。

我们考虑实际的实验安排, 如图 1-2 所示。在 $b \sim b + db$ 的圆环范围内, 其散射方向必为 $\theta \sim \theta + d\theta$, 圆环面积 $d\sigma$ 为

$$d\sigma = 2\pi b db = \frac{\pi a^2 \cos(\frac{\theta}{2})}{4 \sin^3(\frac{\theta}{2})} d\theta$$

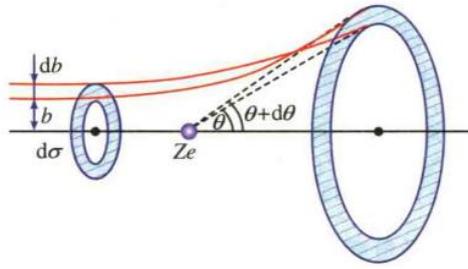


图 1-2 瞄准距离与散射角的关系

而散射到 θ 方向的立体角为

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta$$

两式相除，消去 $d\theta$ ，得微分散射截面

$$\sigma_c \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

其物理意义为单位面积内垂直入射一个粒子时，被这个面积内一个靶原子散射到 θ 角附近单位立体角内的概率，这就是著名的卢瑟福散射公式。

为求得实际的散射 α 粒子数，以便与实验进行比较，还必须考虑靶上的原子数和入射的 α 粒子数。由于薄箔有许多原子核，每一个原子核对应一个这样的环，若各个原子核互不遮挡，设单位体积内靶原子数为 N ，束流面积为 S_0 ，靶厚度为 t ，入射粒子数为 n_0 ，则单位立体角内探测到的粒子数为

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{d\sigma/S_0}{d\Omega} \cdot n_0 \cdot NS_0 t = n_0 N t \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

即

$$dn = n_0 N t \frac{a^2}{16 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} d\Omega$$

2 实验原始数据与处理

接下来，我们将根据推导的结果，测量出 α 粒子束的强度及在空气中的射程，以及验证 α 粒子在金箔散射下的单位时间内的计数 n 与 $\frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}$ 成正比的关系。

2.1 α 粒子束的强度及在空气中的射程

在正式开始实验之前，我们必须将物理 0° 角找出，否则转动角度将没有意义。先目视使放射源准直孔大致对准探测器准直孔，将此处 reset 为 0° 。我们选取200~1000道为感兴

趣区，以去除噪声的影响。测量 $-5^{\circ}\sim 5^{\circ}$ 的 60s 总计数，如表 2-1。

实验中，测得靶到探头的距离 $l_1 = 4.05\text{cm}$ ，源到探头的距离 $l_2 = 6.84\text{cm}$ 。室温为 26.5°C 。

表 2-1 $-5^{\circ}\sim 5^{\circ}$ α 粒子总计数

角度($^{\circ}$)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
总计数	78546	87193	89663	84743	76238	61366	48341	30433	19746	9035	4489

从表格中可知，物理 0° 角即为实际 -3° 角。

接下来，我们测量 $6 \sim 30\text{kPa}$ 范围气压对 ROI 计数的影响，如表 2-2。

表 2-2 $-5^{\circ}\sim 5^{\circ}$ α 粒子总计数

气压/kPa	0	8	18	22	30
总计数	178721	152660	123796	108383	73446

从上表可以得到初始强度为

$$N_0 = \frac{178721}{120\text{s}} = 1489\text{s}^{-1}$$

我们采用直线拟合， $P \sim N$ 曲线如下图 2-1。

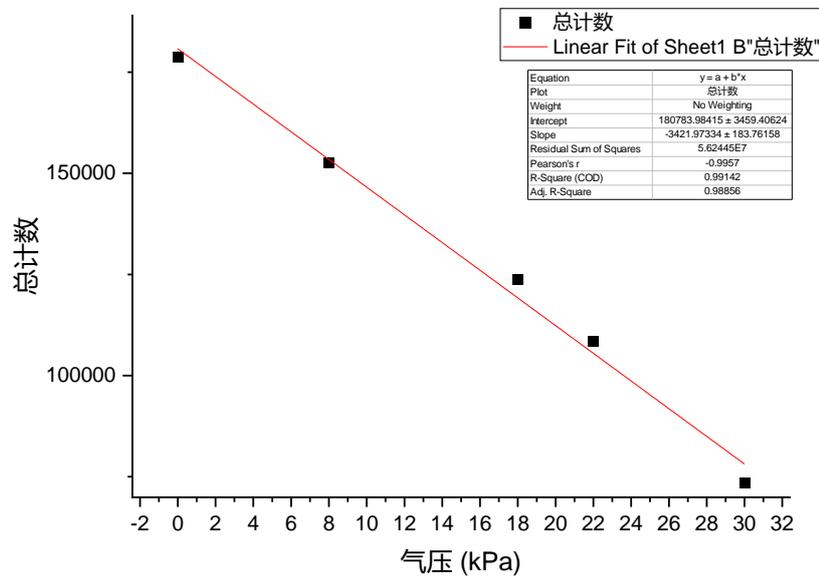


图 2-1 $p \sim N$ 曲线图

拟合直线方程为 $n = -3422 p + 180784$ ，相关系数的平方为 0.991，拟合程度较好。

由参考文献[2]中的第一章分子动理论可知， α 粒子在气压不为零时会与空气分子发生

碰撞，设分子每连续碰撞一次所需时间间隔的平均值为 Δt ，分子数密度为 n ，分子平均速率为 \bar{v} ，分子有效直径为 d ，则其平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

当总计数下降一半时，有一半的粒子的自由程大于源到探头的距离，可以被探头接收，还有一半的粒子的自由程小于源到探头的距离，与空气分子碰撞后偏转，不能被接收到，所以此时平均自由程就为源到探头的距离 l_2 。且由上式我们发现，射程与空气分子数密度，即与质量密度成反比。

由拟合方程可以推得，总计数下降一半时，即 $n = \frac{180784}{2} = 90392$ 时，气压为

$$p = \frac{90392}{3422} \text{ kPa} = 26.4 \text{ kPa}$$

此时源到探头的距离 $l_2 = 6.84 \text{ cm}$ 即为平均自由程，也即射程。

当室温为 26.5°C ，气压为 26.4 kPa 的情况下，根据附录 2 里的公式，空气密度为

$$\rho = 1.293 \times \frac{26.4}{101.325} \times \frac{273}{26.5 + 273} \text{ kg/m}^3 = 0.307 \text{ kg/m}^3$$

则由平均射程与空气密度成反比的关系，得到 α 粒子在标准大气压下的平均射程

$$R = \frac{6.84}{1.293} \times 0.307 \text{ cm} = 1.62 \text{ cm}$$

根据经验公式 $R = (0.285 + 0.005E)E^{1.5}$ ，其为关于 E 的单调递增函数，故我们可以使用二分法的思想数值求解。

取初始区间为 $[0, 10]$ ，运行图 2-2 中程序

```

1  def formula(E):
2      R=(0.285+0.005*E)*E**1.5
3      return R
4
5  l=0
6  r=10
7  for i in range(20):
8      mid=(l+r)/2
9      R=formula(mid)
10     if(R>1.62):
11         r=mid
12     else:
13         l=mid
14     print(mid)
15

```

图 2-2 二分法数值求解程序

得到结果为图 2-3 所示

3.075380325317383

图 2-3 求解结果

得到 α 粒子能量 $E = 3.075 \text{ MeV}$

2.2 验证 $N \propto \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$ 关系

更换靶为金箔，必须重新校对物理 0° 位置。测量 $-3^\circ \sim 3^\circ$ 的 90s 总计数，如表 2-3。

表 2-3 $-3^\circ \sim 3^\circ$ α 粒子总计数

角度($^\circ$)	-3	-2	-1	0	1	2	3
总计数	14489	14501	13946	13269	12405	10800	9779

从表格中可知，物理 0° 角即为实际 -2° 角。

为了验证关系，我们在 $10^\circ \sim 25^\circ$ 范围选取 5 个点进行散射计数，同时将 $K = N \sin^4(\frac{\theta}{2})$ 算出，数据列于表 2-4 中。

表 2-4 $10^\circ \sim 25^\circ$ α 粒子散射计数

角度	10°	13°	16°	19°	22°
时间/s	200	300	600	900	1200
总计数	7598	5347	4565	3070	1852
接收强度 N/s^{-1}	37.99	17.82	7.608	3.411	1.543
$\sin^4 \frac{\theta}{2}$	5.770×10^{-5}	1.642×10^{-4}	3.752×10^{-4}	7.421×10^{-4}	1.326×10^{-3}
K	2.192×10^{-3}	2.926×10^{-3}	2.855×10^{-3}	2.531×10^{-3}	2.046×10^{-3}

理论上的 K 值应为

$$K_0 = 4.8065 \times 10^{-34} \times \frac{1489}{(3.075 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})^2 \times (4.05 \times 10^{-2})^2} = 1.798 \times 10^{-3}$$

我们将 $K \sim \theta$ 曲线作于图 2-4 中

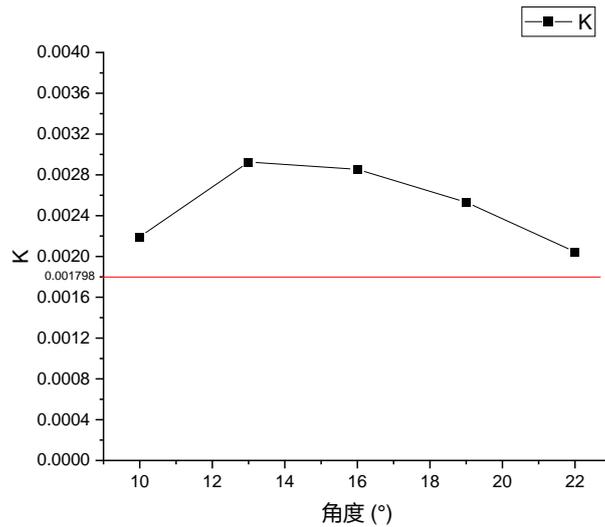


图 2-4 $K \sim \theta$ 曲线图

由图我们可以观察到，实际曲线总位于理论 K 值上方，且偏离大小随角度先增加再减小，偏离的具体原因在思考题中分析。

3 思考题

思考题 2: 根据卢瑟福公式 $N \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 应为常数，本实验的结果有偏差吗？试分析原因。

答：有偏差，原因如下

① 卢瑟福散射公式所得到的的是一个概率公式，只有当实验时间趋于无穷时才会完全相符，但由于客观原因的限制，我们无法耗费太长的时间来获得更加准确的数据，因此随机因素便会影响实验的结果但，总共接受的粒子数会有一些的偏差，而且在 θ 较大时更加明显。

② 在调步进电机的过程中，由于电机转动度数最小值为 1 度， $\theta = 0^\circ$ 的确定不可能绝对的准确，存在零点误差。

③ 在小角度条件下，由于有多层散射物，造成 α 粒子的二次甚至多次散射，这是小角误差的主要来源。

④ ROI 的选择可能会影响实验结果。区间太大，有可能把一些杂散信号也计数；区间太小，则某些信道不会计数。

⑤ 实验中的 l_1 与 l_2 测量时选定的探头和源的位置可能与实际有偏差。

⑥ 粒子源所在金属盒内不可能是完全真空，会有一部分空气分子的影响误差。

⑦ 所用的测量仪器和步进电机旋转有一定误差，这是不可避免的。

思考题 3: 若人体肌肉组织的密度为 1.10g/cm^3 ，根据实验内容 4 的结果估算本实验中的 α 粒子在人体肌肉组织中的射程，单位取 cm 。

答：空气主要由氮气与氧气组成，人体肌肉组织主要是有机物，分子质量不同，且一个为气体一个为固体，但作为估算，我们仍假设不同物质之间有平均自由程与质量密度成反比的关系，故射程为

$$R = \frac{6.84}{1.10 \times 10^3} \times 0.307 \text{ cm} = 1.91 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

即射程为 $1.91 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。

4 总结 (Conclusion)

本实验中笔者完整推导了库伦散射公式和卢瑟福散射公式，测量了 α 粒子束的强度及在空气中的射程，验证了卢瑟福模型的正确性。

通过本次实验，笔者锻炼了文献调查的能力，增进了对卢瑟福散射的理解，也有助于原子物理同步课堂的学习。笔者谨慎调节，锻炼了对快电子学探测系统的调试能力。最后多次测量，得到了符合原理的结果，激发了笔者对原子物理学习的兴趣。

5 致谢 (Acknowledgement)

感谢许蒋辉学长给笔者技术上的指导和耐心的答疑解释，也感谢物理教学实验中心提供的宝贵实验机会。

6 参考文献:

- [1] 卢瑟福散射实验讲义
- [2] 朱晓东. 热学[M]. 中国科学技术大学出版社. 2020
- [3] 朱林繁. 彭新华. 原子物理学[M]. 中国科学技术大学出版社. 2017