实验报告——切变模量的测量

姓名：杨博涵　学号：PB20000328　班级：403 组　实验日期：2021 年 4 月 25 日

一．实验目的

以剪切胡克定律为基本原理，利用扭摆来测量金属丝的切变模量，同时要学习转化法的思想，即尽量设法避免测量那些较难测的物理量，将其转化为易得的物理量的实验方法。

二．实验原理

材料的杨氏模量、切变模量以及断裂强度等宏观量都能反映出物质微观结构的特点，本实验我们测量金属丝的切变模量。

根据剪切胡克定律，在弹性限度内，切应变γ应正比于切应力τ，有如下关系式

$$\tau = G\gamma$$

其中 G 就是比例系数—切变模量。

钢丝下端面绕中心轴线 OO'转过 φ 角（即 P 点转到了 P'的位置）。相应的，钢丝各横截面都发生转动，其单位长度的转角。分析这细圆柱中长为的一小段，其上截面为 A，下截面为 B（如图 5.3.2-2 所示）。由于发生切变，其侧面上的线 ab 的下端移至 b'，即 ab 转动了一个角度 γ。

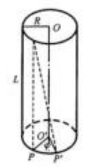

图 5.3.2-1　金属丝扭转形变示意图

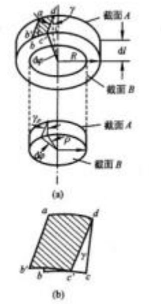

图 5.3.2-2　细丝某一横截面的运动状态

在钢丝内部半径为ρ的位置，切应变为

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dl}$$

截面 A、B 之间的圆柱体，其上下截面相对切变引起的恢复力矩 M 为

$$M = \int_0^R 2\pi G\rho^3 d\rho \frac{\varphi}{L} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{\varphi}{L}$$

故得到

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \varphi}$$

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4}$$

其中 D 为金属丝扭转模量。

由转动定律得，其中I_0为摆的转动惯量

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\varphi = 0$$

即

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

作为扭摆的圆盘上带有一个夹具，这给测量或计算I_0带来困难。为此，可将一个金属环对称地置于圆盘上，两式联立即可消去I_0的影响，其中I_1是金属环转动惯量。即

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}}$$

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}$$

联立以上各式，得到

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$G = \frac{4\pi L m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)}$$

此即切变模量 G 与扭转模量 D 的计算式。

三．实验仪器

待测金属丝，支架系统，7 个砝码（500g），平面镜，标尺，望远镜，钢卷尺，千分尺，刻度尺等。

四．原始数据

根据不确定度传递公式，有

$$\frac{\Delta_G}{G}=\frac{\Delta_L}{L}+2\frac{d_{内}\Delta_{d_{内}}}{d^2_{外}+d^2_{内}}+2\frac{d_{外}\Delta_{d_{外}}}{d^2_{外}+d^2_{内}}-4\frac{\Delta_D}{D}-\frac{2T_1/N^2{}_1\Delta_{T_1}}{\frac{T_1^2}{N_1^2}-\frac{T_0^2}{N_0^2}}+\frac{2T_0/N^2{}_0\Delta_{T_0}}{\frac{T_1^2}{N_1^2}-\frac{T_0^2}{N_0^2}}+\frac{\Delta_m}{m}$$

根据粗测，得到 d1=8.39cm,d2=10.39cm,d=0.780mm,L=43.40cm,10 个周期的总时间 T0=23.85s,T1=38.63s.

故得到

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|=\frac{0.13}{43.40}=3\times10^{-3},\left|\frac{2d1*\Delta d1}{d1^2+d2^2}\right|=\frac{2*8.39*0.04}{10.39^2+8.39^2}=3.76\times10^{-3},\ \left|\frac{2d2*\Delta d2}{d1^2+d2^2}\right|=\frac{2*10.39*0.04}{10.39^2+8.39^2}=4.66\times10^{-3}$$

$$\left|4\frac{\Delta d}{d}\right|=\frac{4*0.004}{0.77}=2.1\times10^{-2},\ \left|\frac{\Delta m}{m}\right|=\frac{0.2}{576.5}=3.47\times10^{-4}$$

发现$\left|4\frac{\Delta d}{d}\right|$最大，故要求$\left|\frac{2*\frac{T1}{N1^2}\Delta T1}{\left(\frac{T1}{N1}\right)^2+\left(\frac{T0}{N0}\right)^2}\right|<\frac{1}{5}\left|4\frac{\Delta d}{d}\right|$且$\left|\frac{2*\frac{T0}{N0^2}\Delta T0}{\left(\frac{T1}{N1}\right)^2+\left(\frac{T0}{N0}\right)^2}\right|<\frac{1}{5}\left|4\frac{\Delta d}{d}\right|$

解得

$$N1>39.8,N0>24.6$$

取 N1=50，N0=30

本次实验每种物理量分别进行 6 组，实验原始数据如下：（螺旋测微计零点为 0.000mm）

组别	1	2	3	4	5	6
钢丝长 L/cm	43.40	43.45	43.41	43.43	43.42	43.46
钢丝直径 d/mm	0.776	0.773	0.778	0.776	0.779	0.778
金属环内径 d_1/cm	8.384	8.394	8.390	8.376	8.384	8.386
金属环内径 d_2/cm	10.394	10.392	10.396	10.400	10.396	10.398
不加金属环时 50 个周期总用时T_0/s	119.12	119.20	119.08	119.29	119.29	119.17
加金属环时 30 个周期总用时T_1/s	115.59	115.90	115.85	115.24	115.88	115.92
金属环质量 m/g	576.5					

五．数据处理与误差分析

1. 金属丝长 L 的平均值

$$\bar{L}=\frac{43.40+43.45+43.41+43.43+43.42+43.46}{6}cm=43.43cm$$

金属丝长的 A 类不确定度

$$u_{Al}=\sqrt{\frac{(43.40-43.43)^2+(43.45-43.43)^2+(43.41-43.43)^2+(43.43-43.43)^2+(43.42-43.43)^2+(43.46-43.43)^2}{6*(6-1)}}cm\ =0.01cm$$

B 类不确定度是由于钢卷尺的允差与人的估计误差导致的，则

$$u_{Bl}=\sqrt{\Delta_{尺}{}^2+\Delta_{估}{}^2}=\sqrt{0.12^2+0.05^2}cm=0.13cm$$

故金属丝长的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_l=\sqrt{(t_{0.95}u_{Al})^2+(k_{0.95}\Delta_{Bl}/C)^2}=\sqrt{(2.45*0.01)^2+(1.960*0.13/3)^2}cm=0.09cm\ ,P=0.95$$

2. 钢丝直径 d 的平均值

$$\bar{d}=\frac{0.776+0.773+0.778+0.776+0.779+0.778}{6}mm=0.7767mm$$

钢丝直径的 A 类不确定度

$$u_{Ad}=\sqrt{\frac{(0.776-0.7767)^2+(0.773-0.7767)^2+(0.778-0.7767)^2+(0.778-0.7767)^2+(0.776-0.7767)^2+(0.778-0.7767)^2}{6*(6-1)}}mm\ =0.0008mm$$

B 类不确定度是由于螺旋测微计的允差与人的估计误差导致的，则

$$u_{Bd}=\sqrt{\Delta_{尺}{}^2+\Delta_{估}{}^2}=\sqrt{0.004^2+0.0005^2}mm=0.004mm$$

故钢丝直径的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_d=\sqrt{(t_{0.95}u_{Ad})^2+(k_{0.95}\Delta_{Bd}/C)^2}=\sqrt{(2.45*0.0008)^2+(1.960*0.004/3)^2}mm=0.003mm\ ,P=0.95$$

3. 金属环内径d_1的平均值

$$\overline{d_1}=\frac{8.384+8.394+8.390+8.376+8.384+8.386}{6}cm=8.386cm$$

金属环内径的 A 类不确定度

$$u_{Ad_1}=\sqrt{\frac{(8.384-8.386)^2+(8.394-6.386)^2+(8.390-8.396)^2+(8.376-8.386)^2+(8.384-8.386)^2+(8.386-8.386)^2}{6*(6-1)}}cm=0.0026cm$$

B 类不确定度是由于游标卡尺的允差与人的估计误差导致的，则

$$u_{Bd_1}=\sqrt{\Delta_{尺}{}^2+\Delta_{估}{}^2}=\sqrt{0.002^2+0.002^2}cm=0.003cm$$

故金属环内径的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_{d1}=\sqrt{\left(t_{0.95}u_{Ar_1}\right)^2+\left(k_{0.95}\Delta_{Br_1}/C\right)^2}=\sqrt{(2.45*0.0026)^2+\left(1.645*0.003/\sqrt{3}\right)^2}cm=0.007cm\ ,P=0.95$$

4. 金属环内径d_2的平均值

$$\overline{d_2}=\frac{10.394+10.392+10.396+10.400+10.396+10.398}{6}cm=10.396cm$$

金属环内径的 A 类不确定度

$$u_{Ad_2}=\sqrt{\frac{(10.394-10.396)^2+(10.392-10.396)^2+(10.396-10.396)^2+(10.400-10.396)^2+(10.396-10.396)^2+(10.398-10.396)^2}{6*(6-1)}}cm=0.0012cm$$

B 类不确定度是由于游标卡尺的允差与人的估计误差导致的，则

$$u_{Bd_2}=\sqrt{\Delta_{尺}{}^2+\Delta_{估}{}^2}=\sqrt{0.002^2+0.002^2}cm=0.003cm$$

故金属环内径的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_{d_2}=\sqrt{\left(t_{0.95}u_{Ar_2}\right)^2+\left(k_{0.95}\Delta_{Br_2}/C\right)^2}=\sqrt{(2.45*0.0012)^2+\left(1.645*0.003/\sqrt{3}\right)^2}cm=0.004cm\ ,P=0.95$$

5. 不加金属环时 50 个周期总用时T_0的平均值

$$\overline{T_0}=\frac{119.12+119.20+119.08+119.29+119.29+119.17}{6}s=119.19s$$

不加金属环时 50 个周期总用时的 A 类不确定度

$$u_{AT_0}=\sqrt{\frac{(119.12-119.19)^2+(119.20-119.19)^2+(119.08-119.19)^2+(119.29-119.19)^2+(119.29-119.19)^2+(119.17-119.19)^2}{6*(6-1)}}s=0.035s$$

B 类不确定度主要是由于人的估计误差导致的，则

$$u_{BT_0}=0.2s$$

故不加金属环时 50 个周期总用时的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_{T_0}=\sqrt{\left(t_{0.95}u_{AT_0}\right)^2+\left(k_{0.95}\Delta_{BT_0}/C\right)^2}=\sqrt{(2.45*0.035)^2+(1.645*0.2/3)^2}s=0.14s\ ,P=0.95$$

6. 加金属环时 30 个周期总用时T_1的平均值

$$\overline{T_1}=\frac{115.59+115.90+115.85+115.24+115.88+115.92}{6}s=115.73s$$

加金属环时 30 个周期总用时的 A 类不确定度

$$u_{AT_1}=\sqrt{\frac{(115.59-115.73)^2+(115.90-115.73)^2+(115.85-115.73)^2+(115.24-115.73)^2+(115.88-115.73)^2+(115.92-115.73)^2}{6*(6-1)}}s=0.11s$$

B 类不确定度主要是人的估计误差导致的，则

$$u_{BT_1}=0.2s$$

故加金属环时 30 个周期总用时的展伸不确定度为（P=0.95）

$$U_{T_1}=\sqrt{\left(t_{0.95}u_{AT_1}\right)^2+\left(k_{0.95}\Delta_{BT_1}/C\right)^2}=\sqrt{(2.45*0.11)^2+(1.645*0.2/3)^2}s=0.29s\quad ,P=0.95$$

7. 由原理知，切变模量 G 与扭转模量 D 的表达式为

$$D=\frac{2\pi^2m({r_1}^2+{r_2}^2)}{{T_1}^2-{T_0}^2}$$

$$G=\frac{4\pi Lm(r_{内}^2+r_{外}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)}$$

扭转模量 D 的平均值为

$$\overline{D}=\frac{\pi^2m\left(\overline{d_1}^2+\overline{d_2}^2\right)}{2((\frac{\overline{T_1}}{N1})^2-(\frac{\overline{T_0}}{N0})^2)}=\frac{\pi^2\times576.5g\times((8.386cm)^2+(10.396cm)^2)}{2\times((\frac{115.73s}{30})^2-(\frac{119.19s}{50})^2)}=5.517\times10^{-3}N*m$$

由不确定度传递公式

$$\frac{U_D}{\overline{D}}=\sqrt{\left(\frac{2\overline{d1}U_{d_1}}{\overline{d_1}^2+\overline{d_2}^2}\right)^2+\left(\frac{2\overline{d_2}U_{d_2}}{\overline{d_1}^2+\overline{d_2}^2}\right)^2+\left(\frac{2\frac{\overline{T_1}}{N1^2}U_{T_1}}{(\frac{\overline{T_1}}{N1})^2-(\frac{\overline{T_0}}{N0})^2}\right)^2+\left(\frac{2(\frac{\overline{T_0}}{N0^2})U_{T_0}}{(\frac{\overline{T_1}}{N1})^2-(\frac{\overline{T_0}}{N0})^2}\right)^2+(\frac{U_m}{m})^2}$$

$$U_D=5.517\times10^{-3}\times\sqrt{\left(\frac{2*8.386*0.007}{8.386^2+10.396^2}\right)^2+\left(\frac{2*10.396*0.004}{8.386^2+10.396^2}\right)^2+\left(\frac{2*\frac{119.19}{50^2}*0.14}{(\frac{115.73}{30})^2-(\frac{119.19}{50})^2}\right)^2+\left(\frac{2*\frac{115.73}{30^2}*0.29}{(\frac{115.73}{30})^2-(\frac{119.19}{50})^2}\right)^2+\left(\frac{0.2}{576.5}\right)^2}N*m$$

$$=0.05\times10^{-3}N*m\ ,P=0.95$$

切变模量 G 的平均值为

$$\bar{G}=\frac{16\pi\bar{L}m\left(\overline{d_1}^2+\overline{d_2}^2\right)}{\bar{d}^4\left((\frac{\overline{T_1}}{N})^2-(\frac{\overline{T_0}}{N})^2\right)}=\frac{16\pi\times 43.43\mathrm{cm}\times 576.5g\times((8.386cm)^2+(10.396cm)^2)}{(0.7767\mathrm{mm})^4\times(\left(\frac{115.73s}{30}\right)^2-\left(\frac{119.19s}{50}\right)^2)}N/m^2=6.71\times 10^{10}N/m^2$$

由不确定度传递公式

$$\frac{U_G}{\bar{G}}=\sqrt{\left(\frac{U_L}{\bar{L}}\right)^2+\left(\frac{2\overline{r_1}U_{r_1}}{\overline{r_1}^2+\overline{r_2}^2}\right)^2+\left(\frac{2\overline{r_2}U_{r_2}}{\overline{r_1}^2+\overline{r_2}^2}\right)^2+\left(\frac{2\overline{T_1}U_{T_1}}{\overline{T_1}^2-\overline{T_0}}\right)^2+\left(\frac{2\overline{T_0}U_{T_0}}{\overline{T_1}^2-\overline{T_0}}\right)^2+\left(4\frac{U_d}{\bar{d}}\right)^2+(\frac{U_m}{m})^2}$$

$$U_G=6.71\times 10^{10}\times\sqrt{(\frac{0.09}{43.43})^2+\left(\frac{2*8.386*0.007}{8.386^2+10.396^2}\right)^2+\left(\frac{2*10.396*0.004}{8.386^2+10.396^2}\right)^2+\left(\frac{2*\frac{119.19}{50^2}*0.14}{(\frac{115.73}{30})^2-(\frac{119.19}{50})^2}\right)^2+(\frac{4*0.003}{0.7767})^2+\left(\frac{2*\frac{115.73}{30^2}*0.29}{(\frac{115.73}{30})^2-(\frac{119.19}{50})^2}\right)^2+\left(\frac{0.2}{576.5}\right)^2}\,N/cm^2$$

$$=0.12\times 10^{10}N/cm^2\ ,P=0.95$$

最后，我们得到了切变模量 G 与扭转模量 D 的最终表达式为

$$G=(6.71\pm 0.12)\times 10^{10}N/cm^2$$
$$D=(5.52\pm 0.05)\times 10^{-3}N/cm^2$$

根据最终结果，我们在$\frac{\Delta G}{G}<2\%,\frac{\Delta D}{D}<1\%$的精度内测得了钢丝杨氏模量的值，实验取得成功。

六．思考与讨论

1．本实验是否满足 γ<<1 的条件?

答：取最保守的扭角为π，此时$\gamma=R\frac{\phi}{L}=\frac{0.777mm}{2}\times\frac{\pi}{43.43cm}=2.81\times 10^{-3}<<1$，始终满足 γ<<1 的条件。所以扭角可以随意取，不限于小角。

2．为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

答：为了提高测量精度，本实验采用了积累法，即测量 50 个周期的总时间以降低误差；转换法，将不易测量的I_0转化为了I_1,T_0,T_1的关系；多次测量法，测量多组数据以提高精度；预实验法，即先进行一系列预实验，根据本实验测量精度的要求，设计并确定测量周期数。

还要注意：不要弄错了一个周期的判断方式，应是经过标记点两次的之间间隔；应熟练掌握各种测量工具的读数方法，不要读错位数，尤其是游标卡尺；在多次　测量时要更换测量位置，比如测钢丝直径时就要多找几个位置测量。